

I grupa zadataka

1.

Neka je funkcija f zadana tablično M -fajlom *tablica.m* koji generiše dva niza $X = [x_1, \dots, x_n]$ i $F = [f_1, \dots, f_n]$ (od kojih je prvi strogo rastući) za tu tablično zadatu funkciju. Tablica ne mora biti ekvidistantna.

- Napisati M -fajl *Lagr1.m* sa funkcijom *Lagr1(x)* koja za uneti argument x vraća približnu vrednost funkcije f u toj tački izračunatu pomoću Lagranžovog interpolacionog polinoma L_1 , korišćenjem svih vrednosti iz tablice.
- Napisati M -fajl *novatablica.m* u kom se prethodna tablica proširuje do nove dodavanjem čvorova $\frac{x_i + x_{i+1}}{2}$, $i = 1, \dots, n-1$, i računanjem vrednosti funkcije f u njima korišćenjem formule: $f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) = \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2}$, $i = 1, \dots, n-1$.
- Napisati M -fajl *Lagr2.m* sa funkcijom *Lagr2(x)* koja za uneti argument x vraća približnu vrednost funkcije f u toj tački izračunatu pomoću Lagranžovog interpolacionog polinoma L_2 , korišćenjem svih vrednosti iz nove tablice.

2.

Neka je funkcija f zadana tablično M -fajlom *tablica.m* koji generiše dva niza $X = [x_1, \dots, x_n]$ i $F = [f_1, \dots, f_n]$ (od kojih je prvi strogo rastući) za tu tablično zadatu funkciju. Tablica mora biti ekvidistantna.

- Napisati M -fajl *polozaj.m* sa funkcijom *polozaj(x)* koja za uneti argument x vraća vrednost 1 ukoliko je $x < x_2$, 2 ukoliko je $x > x_{n-1}$ i 0 inace.
- Napisati M -fajl *Njutn.m* sa funkcijom *Njutn(x)* koja vraća približnu vrednost funkcije f u tački x izračunatu korišćenjem I (II) Njutnovog interpolacionog polinoma, ako je vrednost funkcije *polozaj* u tački x jednaka 1 (2), odnosno izdaje odgovarajuću poruku ukoliko je *polozaj(x) = 0*.

3.

Neka je funkcija f zadana tablično M -fajlom *tablica.m* koji generiše dva niza $X = [x_1, \dots, x_n]$ i $F = [f_1, \dots, f_n]$ (od kojih je prvi strogo rastući, a drugi monoton) za tu tablično zadatu funkciju. Tablica ne mora biti ekvidistantna.

- Napisati M -fajl *vredfunk.m* sa funkcijom *vredfunk(x)* koja za uneti argument x vraća približnu vrednost funkcije f u toj tački izračunatu pomoću Njutnovog interpolacionog polinoma sa podeljenim razlikama konstruisanog korišćenjem svih vrednosti iz tablice.
- Napisati M -fajl *inverz.m* sa funkcijom *inverz(y)* koja za zadatu vrednost y inverznom interpolacijom približno odredjuje x za koje je $f(x) = y$.

4.

- Napisati M -fajl *tablica1.m* sa funkcijom *tablica1*(A, B, a, n) koja funkciju $f(x) = \frac{1}{A + Bx^2}$ tabelira na segmentu $[-a, a]$ sa korakom $h = \frac{2a}{n}$.
- Napisati M -fajl *tablica2.m* sa funkcijom *tablica2*(A, B, a, n) koja funkciju $f(x) = \frac{1}{A + Bx^2}$ tabelira na segmentu $[-a, a]$ sa čvorovima $x_i, i = 1, \dots, n + 1$, koji su nule Čebiševljevog polinoma T_{n+1} na segmentu $[-a, a]$.
- Napisati M -fajl *poredjenje.m* sa funkcijom *poredjenje*(A, B, a, n, x) koja vraća vrednost $|L_2(x) - f(x)| - |L_1(x) - f(x)|$, gde je $L_1(L_2)$ Lagranžov interpolacioni polinom dobijen korišćenjem svih vrednosti iz *tablice1* (*tablice2*).

5.

Neka je funkcija f zadata eksplicitno M -fajlom *funkcija.m*.

- Napisati M -fajl *tablica.m* sa funkcijom *tablica*(a, k, n) koja funkciju f tabelira na segmentu čiji je levi kraj tačka a sa k čvorova i korakom $h = \frac{1}{n}$.
- Napisati M -fajl *vredfunk.m* sa funkcijom *vredfunk*(a, k, n, x) koja vraća vrednost proizvoljnog interpolacionog polinoma P u tački x dobijenog korišćenjem svih vrednosti iz tablice.

II grupa zadataka

1.

Neka je funkcija f zadata eksplicitno funkcijskim M -fajlom *funkcija.m*.

- Napisati M -fajl *vredfunk.m* sa funkcijom *vredfunk(k)* koja koristeći uopštenu Simpsonovu kvadraturnu formulu (sa $n = 9$ čvorova) približno izračunava vrednost funkcije $I(x) = \int_1^x f(t)dt$, kada se x kreće od 2 do $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$ sa korakom 1 i vraća dva niza: X sa vrednostima x_i i Y sa izračunatim vrednostima funkcije $I(x)$ u tačkama x_i .
- Napisati M -fajl *polinom.m* sa funkcijom *polinom(X, Y, x0)* koji koristeći prethodno formirane nizove vraća približnu vrednost funkcije $I(x)$ u proizvoljnoj tački x_0 segmenta $[2, k]$, izračunatu korišćenjem nekog interpolacionog polinoma.

2.

Neka je funkcija f zadata eksplicitno funkcijskim M -fajlom *funkcija.m*.

- Napisati M -fajl *vredfunk.m* sa funkcijom *vredfunk(k)* koja koristeći uopštenu trapeznu kvadraturnu formulu (sa $n = 9$ čvorova) približno izračunava vrednost funkcije $I(x) = \int_1^x f(t)dt$, kada se x kreće od 2 do $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$, sa korakom 1 i vraća dva niza: X sa vrednostima x_i i Y sa izračunatim vrednostima funkcije $I(x)$ u tačkama x_i .
- Napisati M -fajl *polinom.m* sa funkcijom *polinom(X, Y, x0)* koji koristeći prethodno formirane nizove vraća približnu vrednost funkcije $I(x)$ u proizvoljnoj tački x_0 segmenta $[2, k]$, izračunatu korišćenjem nekog interpolacionog polinoma.

3.

Neka je funkcija f zadata tablično M -fajlom *tablica.m* koji generiše dva niza $X = [x_1, \dots, x_n]$ i $F = [f_1, \dots, f_n]$ (od kojih je prvi strogo rastući) za tu tablično zadatu funkciju. Tablica ne mora biti ekvidistantna.

- Napisati M -fajl *izvod.m* u kom se na osnovu prethodne tablice formira tablica prvog izvoda funkcije f u tačkama x_1, x_2, \dots, x_{n-1} korišćenjem sledeće formule: $f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1}}$.
- Napisati M -fajl *vredizvod.m* sa funkcijom *vredizvod(x)* koja za uneti argument x vraća približnu vrednost prvog izvoda funkcije f izračunatu korišćenjem nekog interpolacionog polinoma konstruisanog na osnovu svih vrednosti iz tablice iz fajla *izvod.m*.
- Napisati M -fajl *nula.m* sa funkcijom *nula()* koja metodom inverzne interpolacije približno određuje i vraća jednu nulu prvog izvoda funkcije f (pretpostavka je da je prvi izvod monotona funkcija).

4.

Neka je funkcija f zadata tablično M -fajlom *tablica.m* koji generiše dva niza $X = [x_1, \dots, x_n]$ i $F = [f_1, \dots, f_n]$ (od kojih je prvi strogo rastući) za tu tablično zadatu funkciju. Tablica mora biti ekvidistantna (sa korakom h).

- Napisati M -fajl *drugizvod.m* u kom se na osnovu prethodne tablice formira tablica drugog izvoda funkcije f u tačkama x_2, x_2, \dots, x_{n-1} korišćenjem sledeće formule: $f''(x_i) = \frac{f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1}))}{h^2}$.
- Napisati M -fajl *vred2izvod.m* sa funkcijom *vred2izvod(x)* koja za uneti argument x vraća približnu vrednost drugog izvoda funkcije f izračunatu korišćenjem nekog interpolacionog polinoma konstruisanog na osnovu svih vrednosti iz tablice iz fajla *drugizvod.m*.
- Napisati M -fajl *nula.m* sa funkcijom *nula()* koja metodom inverzne interpolacije približno određuje i vraća jednu nulu drugog izvoda funkcije f (pretpostavka je da je drugi izvod monotona funkcija).

5.

Neka je funkcija f (koja ne mora biti (samo) pozitivna) zadata eksplicitno funkcijskim M -fajlom *funkcija.m*.

- Napisati M -fajl *Runge.m* sa funkcijom *Runge(S1, S2)* koja vraća vrednost Rungeove ocene greške uopštene Simpsonove kvadrature formule, ako su $S1$ i $S2$ njene vrednosti od kojih je jedna izračunata sa dvostruko manjim korakom u odnosu na drugu.
- Napisati M -fajl *zapremina.m* sa funkcijom *zapremina(a, b, eps)* koja koristeći uopštenu Simpsonovu kvadraturu formulu vraća zapreminu tela nastalog obrtanjem figure ograničene pravama $y = 0, x = a, x = b$ i funkcijom f oko ose Ox izračunatu sa tačnošću *eps*. (Za ocenu tačnosti koristiti funkciju *Runge*.)

III grupa zadataka

1.

Neka je funkcija f zadata eksplicitno funkcijskim M -fajlom *funkcija.m*.

- Napisati M -fajl *Njutn.m* sa funkcijom $Njutn(a, c, eps)$ koja za unete argumente a, c i eps vraća rešenje jednačine $f(x) = c$ (gde je a početna vrednost iterativnog procesa) izračunato Njutnovom metodom sa tačnošću eps . Kriterijum zaustavljanja je $|f(x_i) - c| < eps$. (Pretpostavka je da su ispunjeni svi uslovi za primenu metode.)
- Napisati M -fajl *tablica.m* u kom se za uneti vektor $C = [c_1, \dots, c_n]$, čiji su elementi različiti, formira tablica $(x_1, c_1), \dots, (x_n, c_n)$, gde su $x_i, i = 1, \dots, n$ rešenja jednačina $f(x_i) = c_i$ dobijena korišćenjem funkcije iz prethodne tačke.
- Napisati M -fajl *vredfunk.m* sa funkcijom $vredfunk(x)$ koja vraća vrednost proizvoljnog interpolacionog polinoma u tački x dobijenog korišćenjem svih vrednosti iz formirane tablice. (Niz čvorova $x_i, i = 1, \dots, n$ ne mora biti rastući.)

2.

Neka je funkcija $f(x)$ zadata tablično M -fajlom *tablica.m* koji generiše dva niza $X = [x_1, \dots, x_n]$ i $F = [f_1, \dots, f_n]$ (od kojih je prvi strogo rastući) za tu tablično zadatu funkciju. Tablica ne mora biti ekvidistantna.

- Napisati M -fajl *funk.m* sa funkcijom $funk(x)$ koja za unetu vrednost argumenta x vraća približnu vrednost funkcije f u toj tački izračunatu nekim interpolacionim polinomom koristeći sve vrednosti iz tablice.
- Napisati M -fajl *polov.m* sa funkcijom $polov(a, b, eps)$ koja računa i vraća rešenje jednačine $funk(x) = 0$ metodom polovljenja intervala na intervalu $[a, b]$ sa tačnošću eps . Pretpostavka je da je funkcija različitog znaka na krajevima intervala.
- Napisati M -fajl *nule.m* sa funkcijom $nule()$ koja, koristeći prethodne funkcije, metodom plovljenja intervala nalazi približne vrednosti svih nula funkcije $funk(x)$ sa tačnošću 10^{-4} i vraća ih u vidu niza kao rezultat. Nule tražiti u onim podintervalima u čijim je krajevima tablična vrednost funkcije različitog znaka.

3.

Neka je funkcija f zadata tablično M -fajlom *tablica.m* koji generiše dva niza $X = [x_1, \dots, x_n]$ i $F = [f_1, \dots, f_n]$ (od kojih je prvi strogo rastući) za tu tablično zadatu funkciju. Tablica ne mora biti ekvidistantna.

- Napisati M -fajl *funk.m* sa funkcijom $funk(x)$ koji za unetu vrednost argumenta x vraća približnu vrednost funkcije u toj tački izračunatu nekim interpolacionim polinomom, koristeći sve vrednosti iz tablice.
- Napisati M -fajl *nula.m* sa funkcijom $nula(eps)$ koja računa i vraća rešenje jednačine $funk(x) = x$ metodom proste iteracije sa tačnošću eps . (Kriterijum zaustavljanja je: $|x_n - x_{n-1}| < eps$) Pretpostavka je da je funkcija na tom intervalu kontrakcija. Za početnu tačku iterativnog niza uzeti proizvoljan element niza x .
- Grafički prikazati zavisnost brzine konvergencije od tačnosti $epsilon$ ako se ona kreće od 10^{-3} do 10^{-4} sa korakom 10^{-4} . (Pod brzinom konvergencije se podrazumeva broj iterativnih koraka.)

4.

Neka je funkcija f zadata tablično M -fajlom *tablica.m* koji generiše dva niza $X = [x_1, \dots, x_n]$ i $F = [f_1, \dots, f_n]$ (od kojih je prvi strogo rastući) za tu tablično zadatu funkciju. Tablica ne mora biti ekvidistantna.

- Napisati M -fajl *funk.m* sa funkcijom $funk(x)$ koji za unetu vrednost argumenta x vraća približnu vrednost funkcije u toj tački izračunatu nekim interpolacionim polinomom, koristeći sve vrednosti iz tablice.
- Napisati M -fajl *nula.m* sa funkcijom $nula(eps)$ koja računa i vraća rešenje jednačine $funk(x) = 0$ metodom regula-falsi sa tačnošću eps . (Kriterijum zaustavljanja je: $|f(x_n)| < eps$) Pretpostavka je da je funkcija različitog znaka na krajevima intervala. Za početnu tačku iterativnog niza uzeti levi kraj intervala.

5.

Neka je funkcija f zadata tablično M -fajlom *tablica.m* koji generiše dva niza $X = [x_1, \dots, x_n]$ i $F = [f_1, \dots, f_n]$ (od kojih je prvi strogo rastući) za tu tablično zadatu funkciju. Tablica ne mora biti ekvidistantna.

- Napisati M -fajl *funk.m* sa funkcijom $funk(x)$ koji za unetu vrednost argumenta x vraća približnu vrednost funkcije u toj tački izračunatu nekim interpolacionim polinomom, koristeći sve vrednosti iz tablice.
- Napisati M -fajl *nula.m* sa funkcijom $nula(eps)$ koja računa i vraća rešenje jednačine $funk(x) = 0$ metodom sečice sa tačnošću eps (Kriterijum zaustavljanja je: $|f(x_n)| < eps$). Pretpostavka je da je funkcija različitog znaka na krajevima intervala. Za početnu tačku iterativnog niza uzeti levi kraj intervala.

6.

- Napisati M -fajl *Gaus.m* sa funkcijom $Gaus(n, k, b)$ koja za unete argumente n, k i b najpre zaokružuje elemente Hilbertove matrice reda n na k decimala, a zatim, Gausovom metodom eliminacije (bez pivotiranja), rešava sistem $Hx = b$, gde je H novodobijena matrica, a b zadati vektor. Funkcija vraća Euklidsku normu vektora $Hx - b$ i uslovljenost matrice H (dozvoljeno je korišćenje *MATLAB* funkcija *hilb* i *cond*).
- Napisati M -fajl *uslovljenost.m* sa funkcijom $uslovljenost(n, K, b)$ (gde je $K = [k_1, \dots, k_m]$, rastući niz prirodnih brojeva) koja za zadate argumente vraća matricu formata $3 \times m$ čije su vrste redom vektor K , vektor $[cond(H_1), \dots, cond(H_m)]$ i vektor $[r_1, \dots, r_m]$. (H_i je Hilbertova matrica reda n čiji su elementi zaokruženi na k_i decimala, a r_i je Euklidska norma vektora $H_i x - b$, $i = 1, \dots, m$.)