

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ  
Математички факултет

Зоран Станић

# ГЕОДЕЗИЈСКЕ МРЕЖЕ

магистарски рад

Београд, новембар 2003.

## Коментори:

др Неда Бокан  
Математички факултет Београд

др Бошко Јовановић  
Математички факултет Београд

## Чланови комисије за преглед, оцену и одбрану рада:

др Неда Бокан  
Математички факултет Београд

др Бошко Јовановић  
Математички факултет Београд

др Ђорђе Дугошија  
Математички факултет Београд

др Предраг Јаничић  
Математички факултет Београд

др Конрад Полтиер  
Математички институт Берлин  
(само у комисији за преглед и оцену рада)

др Еберхард Малковски  
Природно–математички факултет Ниш  
(само у комисији за одбрану рада)

# Садржај

---

Предговор	5
Увод	7
<b>1 Унутрашња геометрија површи</b>	<b>9</b>
1.1 Метрика . . . . .	9
1.2 Оператор облика . . . . .	10
1.3 Кривина нормале у правцу вектора и главне кривине . . . . .	11
1.4 Гаусова и средња кривина . . . . .	12
1.5 Кристофелови симболи . . . . .	13
<b>2 Геодезијске криве</b>	<b>15</b>
2.1 Геодезијска кривина и торзија . . . . .	15
2.2 Геодезијске једначине . . . . .	19
2.3 Клероове елементарне површи . . . . .	22
2.4 Експоненцијално пресликавање . . . . .	26
2.5 Геодезијске криве и унутрашње растојање . . . . .	28
2.6 Површ као метрички простор . . . . .	30
<b>3 Методе Рунге–Кута</b>	<b>33</b>
<b>4 Геодезијски полиедри и мреже</b>	<b>39</b>
4.1 Основне дефиниције . . . . .	39
4.2 Дискретне геодезијске криве . . . . .	42
4.3 Геодезијски полиедри . . . . .	45
4.4 Особине и генерисање геодезијских мрежа . . . . .	49
4.5 Процес геодезације . . . . .	51
<b>5 Геодезијска дискретизација</b>	<b>59</b>
5.1 Дефиниција и особине . . . . .	59
5.2 Четвороугаоне мреже . . . . .	61
5.3 Асимптотско–геодезијске мреже . . . . .	65
<b>Закључак</b>	<b>69</b>
<b>Литература</b>	<b>71</b>



# Предговор

---

У овом раду изучавају се особине неких класа дискретних површи и мрежа, као и неки начини дискретизације глатких површи. Једна од основних карактеристика рада је његов мултидисциплинарни карактер, узрокован специфичношћу теме која је обрађивана. Поред диференцијалне и дискретне геометрије, присутни су и елементи нумеричке математике, теорије графова и нумеричких метода оптимизације.

У глави 1 су издвојене неке познате дефиниције и тврђења из диференцијалне геометрије. Глава 2 представља преглед геометрије геодезијских кривих глатких површи које заузимају централно место у последњим двама главама. Методама Рунге–Кута за нумеричко решавање обичних диференцијалних једначина посвећена је глава 3.

Оригинални резултати презентовани су у наредним двама главама. У оквиру главе 4, најпре се уводе основни појмови геометрије дискретних површи и мрежа простора  $\mathbf{R}^3$ , а затим дефинише нова класа полиедралних површи ( $G$ -полиедри) и њихов аналогон у случају дискретних мрежа. Поред прегледа њихових особина, даје се и значајан број примера, а у случају  $G$ -мрежа, разматра се проблем њиховог генерисања, као и њиховог добијања од произвољне дискретне мреже. Глава 5 је посвећена дискретизацији глатких површи коришћењем геодезијских кривих. Уочена је њена главна предност, начини спровођења, али и неки њени недостаци.

Захваљујем коменторима Неди Бокан и Бошку Јовановићу, професорима Математичког факултета у Београду, као и Конраду Полтиеру са Техничког универзитета у Берлину на свесрдној помоћи.

Београд, новембар 2003.

Аутор



# Увод

---

Последњих деценија постигнути су значајни резултати у дискретној геометрији узроковани, што природном аналогијом са диференцијалном геометријом, што практичним применама (рецимо, улогом дискретне геометрије у рачунарској графици). Дискретна геометрија нема чисто геометријски карактер већ укључује и друге математичке дисциплине: нумеричку математику, оптимизацију, теорију графова и сличне.

До сада су изучавани различити дискретни аналози глатких површи, као што су дискретне површи константне Гаусове кривине, дискретне минималне површи, дискретне површи генерисане асимптотским кривим и друге. Централно место у овом раду заузимају геодезијске криве, а предмет нашег изучавања су дискретне површи генерисане (дискретним и глатким) геодезијским кривим.

У конструкцији дискретних површи разликујемо два приступа:

1. конструкција дискретне површи која задовољава одређене услове, али не зависи од неке глатке површи;
2. дискретизација глатке површи.

У првом случају проширујемо неке познате резултате из диференцијалне геометрије на дискретан случај. Конкретно изучавамо аналогон површи параметризованих геодезијским кривим. Дајемо основне дефиниције (при чему користимо елементе теорије графова), одређујемо њихове особине (тај део је геометријског карактера) и разматрамо проблем одређивања општег алгоритма за њихово генерисање уз исцрпно коришћење нумеричке математике и оптимизације.

Геодезијске криве играју фундаменталну улогу, како у геометрији глатких површи и многострукости, тако и у дискретној геометрији. У диференцијалној геометрији оне представљају уопштење појма праве раванске линије и као такве поседују две особине: оне су „најправиле” и локално најкраће криве. Дискретне геодезијске криве се, у том погледу, битно разликују. Наиме, оне, у општем случају, не поседују обе претходно поменуће особине.

Дискретне геодезијске криве су изучаване од стране многих математичара и, генерално, разликују се два приступа. Са једне стране, геодезијска крива полиедра је дефинисана као најкраћа полиедрална крива, а са друге као „најправија” крива. Поред важне улоге коју играју у (не)регуларној диференцијалној геометрији, најкраће полиедралне криве нису (или нису јединствено) продуживе преко сваког темена полиедра, те као такве, нису јединствено одређене задавањем тачке из које полазе и одговарајућег тангентног вектора, што је једна од главних карактеристика глатких геодезијских кривих. Касније установљени концепт најправиле геодезијских кривих нема тај недостатак и њега ћемо користити у наредним разматрањима.

У рачунарској графици се срећемо са потребом да се глатка површ замени (апроксимира) дискретном. Том приликом, неопходно је да дискретна површ прецизно апроксимира глатку и омогући имплементацију свих резултата добијених у глатком случају. Стога, избор начина дискретизације игра круцијалну улогу. Дискретизација генерисана геодезијским кривим глатке површи представља један од могућих избора. Разлог за то је мало одступање геодезијских кривих од правих (дискретних) линија. Разматрамо такве дискретизације, а нумеричка математика представља основни апарат за њихово одређивање.

Тачке, векторе и елементарне површи простора  $\mathbf{R}^n$  означавамо малим подебљаним словима латинице, а криве малим подебљаним словима грчког алфабета. За произвољне површи, полиедре и дискретне мреже користимо ознаке  $\mathcal{M}, \mathcal{P}, \mathcal{S} \dots$ . Завршетак доказа означавамо са  $\square$ , а завршетак примера са  $\blacksquare$ .



# Глава 1

## Унутрашња геометрија површи

---

У оквиру ове главе дајемо кратак преглед неких дефиниција и тврђења диференцијалне геометрије која се јављају у каснијим разматрањима. Том приликом подразумевамо да су основни појмови (као што су крива, дужина криве, брзина криве, (регуларна, елементарна) површ, векторско поље, оријентација површи...) познати читаоцу.

### 1.1 Метрика

**Дефиниција 1.1** Нека је  $\mathbf{x} : U \mapsto \mathbf{R}^n$  елементарна површи. Функције  $E, F, G : U \mapsto \mathbf{R}$  дефинисане са

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = \|\mathbf{x}_u\|^2, \quad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v, \quad G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = \|\mathbf{x}_v\|^2,$$

називамо коефицијентима прве фундаменталне форме површи  $\mathbf{x}$ , док је  $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$  Риманова<sup>1</sup> метрика површи  $\mathbf{x}$ .

**Лема 1.1** Нека је  $\alpha : (a, b) \mapsto \mathbf{R}^n$  крива која припада регуларној инјективној елементарној површи  $\mathbf{x} : U \mapsto \mathbf{R}^n$ . Тада је функција дужине лука, који полази из тачке  $\alpha(c)$ , криве  $\alpha$  дата са:

$$s(t) = \int_c^t \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt.$$

**Доказ:** Тврђење следи на основу следећих једнакости:

$$s(t) = \int_c^t \|\alpha'(t)\| dt = \int_c^t \|u'(t)\mathbf{x}_u(u(t), v(t)) + v'(t)\mathbf{x}_v(u(t), v(t))\| dt \quad (1.1)$$

$$= \int_c^t \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt. \quad (1.2)$$

□

---

<sup>1</sup>Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866), немачки математичар.

**Дефиниција 1.2** Нека је  $M \in \mathbf{R}^3$  регуларна површ и нека су  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  тачке које јој припадају. Тада унутрашње растојање  $\rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ , између тачака  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$ , представља инфимум дужина свих део по део диференцијабилних кривих  $\alpha$  површи  $M$ , таквих да су  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  њихове крајње тачке.

У општем случају, унутрашње растојање  $\rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  је веће од еуклидског  $\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|$ .

**Напомена 1.1** Користимо две врсте производа инфинитезимала  $du$  и  $dv$ . **Симетрични производ**, за који важи  $du dv = dv du$  и такозвани **клин производ**, који означавамо са  $du \wedge dv$  и за који важи  $du \wedge dv = -dv \wedge du$ .

**Дефиниција 1.3** Нека је  $\mathbf{x} : U \mapsto \mathbf{R}^n$  инјективна регуларна елементарна површ и нека је  $S$  њен компактан (ограничен и затворен) подскуп. Тада је површина скупа  $S$  дата са

$$P(S) = \iint_{\mathbf{x}^{-1}(S)} \sqrt{EG - F^2} du \wedge dv.$$

**Лема 1.2** Дефиниција површине не зависи од избора елементарне површи.

**Доказ:** Нека су  $\mathbf{x} : U \mapsto \mathbf{R}^n$  и  $\mathbf{y} : V \mapsto \mathbf{R}^n$ , инјективне регуларне елементарне површи и нека важи  $S \subseteq \mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V)$ . Након дужег, али директног рачуна, добијамо

$$\sqrt{E_{\mathbf{y}}G_{\mathbf{y}} - F_{\mathbf{y}}^2} = \sqrt{E_{\mathbf{x}}G_{\mathbf{x}} - F_{\mathbf{x}}^2} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} \right|.$$

$\left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} \right|$  је детерминанта Јакобијеве матрице  $\mathcal{J}(\mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y})$ . Стога, након смене променљивих у двоструком интегралу добијамо

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbf{y}^{-1}(S)} \sqrt{E_{\mathbf{y}}G_{\mathbf{y}} - F_{\mathbf{y}}^2} d\bar{u} \wedge d\bar{v} &= \iint_{\mathbf{y}^{-1}(S)} \sqrt{E_{\mathbf{x}}G_{\mathbf{x}} - F_{\mathbf{x}}^2} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} \right| d\bar{u} \wedge d\bar{v} \\ &= \iint_{\mathbf{x}^{-1}(S)} \sqrt{E_{\mathbf{x}}G_{\mathbf{x}} - F_{\mathbf{x}}^2} du \wedge dv. \end{aligned}$$

□

## 1.2 Оператор облика

**Дефиниција 1.4** Нека је  $M \subset \mathbf{R}^3$  регуларна површ и нека је  $U$  векторско поље нормала дефинисано у околини тачке  $\mathbf{p} \in M$  и нека је  $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$  тангентни вектор у тачки  $\mathbf{p}$ . **Оператор облика** дефинишемо са

$$S(\mathbf{v}_{\mathbf{p}}) = -D_{\mathbf{v}}U,$$

где је  $D_{\mathbf{v}}$  извод векторског поља у правцу вектора  $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$ .

У свакој тачки оријентисане регуларне површи постоји избор једног од два векторска поља нормала:  $U$  и  $-U$ . Оператор облика који одговара једном од та два поља је супротног знака од оператора облика који одговара другом векторском пољу. Уколико је  $M$  неоријентисана регуларна површ, онда векторско поље нормала није непрекидно дефинисано на целој површи, но то не утиче на дефиницију оператора облика, пошто је сав рачун који укључује векторско поље  $U$  локалног карактера.

**Лема 1.3** Нека је  $\mathbf{x} : U \mapsto \mathbf{R}^3$  регуларна елементарна површ. Тада важи

$$S(\mathbf{x}_u) = -\mathbf{U}_u \quad \text{и} \quad S(\mathbf{x}_v) = -\mathbf{U}_v.$$

**Доказ:** За фиксирану вредност  $v_0 \in \mathbf{R}$  дефинишимо криву  $\alpha : (a, b) \mapsto \mathcal{M}$  са  $\alpha(u) = \mathbf{x}(u, v_0)$ . Тада, користећи особине извода векторског поља у правцу тангентног вектора, добијамо

$$S(\mathbf{x}_u(u, v)) = S(\alpha'(u)) = -D_{\alpha'(u)}\mathbf{U} = -(\mathbf{U} \circ \alpha)'(u).$$

Међутим,  $(\mathbf{U} \circ \alpha)'$  је исто што и  $\mathbf{U}_u$ . Слично се доказује и друга једнакост.  $\square$

**Лема 1.4** У свакој тачки  $\mathbf{p}$  регуларне површи  $\mathcal{M} \subset \mathbf{R}^3$ , оператор облика је линеарно пресликавање:

$$S : T_{\mathbf{p}}\mathcal{M} \mapsto T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}.$$

**Доказ:** Линеарност оператора облика следи из једнакости  $D_a\mathbf{v} + bD_w = aD_v + bD_w$ . Да бисмо показали да је кодомен оператора облика, такође тангентни простор  $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$ , довољно је да покажемо да је вектор  $S(\mathbf{v}_{\mathbf{p}})$  ортогоналан на вектор  $\mathbf{U}(\mathbf{p})$ , за сваки тангентни вектор  $\mathbf{v}_{\mathbf{p}} \in T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$ . Користећи једнакост  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{U} = 1$  и, поново, особине извода у правцу тангентног вектора и извода векторског поља у правцу тангентног вектора добијамо једнакости:

$$0 = \mathbf{v}_{\mathbf{p}}[\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}] = 2D_{\mathbf{v}_{\mathbf{p}}}\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}(\mathbf{p}) = -2S(\mathbf{v}_{\mathbf{p}}) \cdot \mathbf{U}(\mathbf{p}).$$

$\square$

**Лема 1.5** Нека је  $\alpha : (a, b) \mapsto \mathcal{M}$  крива површи  $\mathcal{M} \subset \mathbf{R}^3$ . Тада важи

$$\alpha'' \cdot \mathbf{U} = S(\alpha') \cdot \alpha'.$$

**Доказ:** Размотримо рестрикцију векторског поља  $\mathbf{U}$  на криву  $\alpha$ . Како је  $\alpha'(t)$  тангентни вектор површи  $\mathcal{M}$ , за свако  $t \in (a, b)$ , важи

$$\alpha' \cdot \mathbf{U} = 0.$$

Диференцирањем претходне једнакости добијамо:

$$\alpha'' \cdot \mathbf{U} = -\mathbf{U}' \cdot \alpha' = S(\alpha') \cdot \alpha'.$$

$\square$

### 1.3 Кривина нормале у правцу вектора и главне кривине

**Дефиниција 1.5** Правац  $\mathbf{L}$  тангентног простора регуларне површи  $\mathcal{M}$  је једnodимензиони потпростор тангентног простора  $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$ .

**Напомена 1.2** Сваки тангентни вектор  $\mathbf{v}_{\mathbf{p}} \in T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$ , различит од нула вектора, одређује јединствени једnodимензиони потпростор  $\mathbf{L}$ . Стога се често, уместо термина „правац  $\mathbf{L}$ ”, користи термин „правац вектора  $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$ ”.

**Дефиниција 1.6** Нека је  $\mathbf{u}_p$  тангентни вектор регуларне површи  $M \subset \mathbf{R}^3$ , такав да важи  $\|\mathbf{u}_p\| = 1$ . **Кривина нормале површи  $M$  у правцу вектора  $\mathbf{u}_p$**  дата је са

$$\mathbf{k}(\mathbf{u}_p) = S(\mathbf{u}_p) \cdot \mathbf{u}_p.$$

Општије, уколико је  $\mathbf{v}_p$  тангентни вектор површи  $M$  у тачки  $p$ , различит од нула вектора, тада дефинишемо

$$\mathbf{k}(\mathbf{v}_p) = \frac{S(\mathbf{v}_p) \cdot \mathbf{v}_p}{\|\mathbf{v}_p\|^2}.$$

**Дефиниција 1.7** Нека је  $L$  правац тангентног простора  $T_p M$  регуларне површи  $M \subset \mathbf{R}^3$ . Кажемо да је правац  $L$  **асимптотски правац**, уколико је кривина нормале површи  $M$  у правцу  $L$  једнака нули. Такође, вектор  $\mathbf{v}_p$  који одређује правац  $L$  називамо **асимптотски вектор**.

**Дефиниција 1.8** Нека је  $p$  тачка регуларне површи  $M \subset \mathbf{R}^3$ . Максималну и минималну вредност кривине нормале  $\mathbf{k}$  у тачки  $p$  називамо **главне кривине** површи  $M$  у тачки  $p$ . Главне кривине површи означавамо са  $k_1$  и  $k_2$ . Јединичне векторе у чијим правцима се достижу екстремне вредности кривине нормале називамо **главни вектори**, док су њима одређени правци – **главни правци**.

**Дефиниција 1.9** Нека је  $\mathbf{x} : U \mapsto \mathbf{R}^3$  регуларна елементарна површ и нека је  $U$  векторско поље нормала површи  $\mathbf{x}$ . Тада су **кофицијенти друге фундаменталне форме** елементарне површи  $\mathbf{x}$  дати са

$$e = -U_u \cdot \mathbf{x}_u = U \cdot \mathbf{x}_{uu}, \quad f = -U_v \cdot \mathbf{x}_u = U \cdot \mathbf{x}_{uv} = U \cdot \mathbf{x}_{vu}, \quad g = -U_v \cdot \mathbf{x}_v = U \cdot \mathbf{x}_{vv}.$$

Доказ наредне леме може се наћи у [8].

**Лема 1.6** *Сопствене вредности оператора облика регуларне површи  $M \subset \mathbf{R}^3$  у тачки  $p \in M$  су главне кривине  $k_1$  и  $k_2$  површи  $M$  у тачки  $p$ . Њима одговарајући сопствени вектори су јединични главни вектори. Уколико важи  $k_1 = k_2$ , онда је оператор облика  $S$  једнак скаларном умножку вредности  $k_1$ . У супротном, сопствени вектори  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$  су ортогонални и оператор облика је дат са*

$$S(\mathbf{e}_1) = k_1 \mathbf{e}_1,$$

односно

$$S(\mathbf{e}_2) = k_2 \mathbf{e}_2.$$

## 1.4 Гаусова и средња кривина

**Дефиниција 1.10** Нека је  $M$  регуларна површ простора  $\mathbf{R}^3$ . **Гаусова<sup>2</sup> кривина  $K$  и средња кривина  $H$**  површи  $M$  су функције  $K, H : M \mapsto \mathbf{R}$  дефинисане са

$$K(p) = \det(S(p)) \quad \text{и} \quad H(p) = \frac{1}{2} \text{tr}(S(p)).$$

<sup>2</sup>Carl Friedrich Gauß (1777–1855), немачки математичар.

Приметимо да, за разлику од Гаусове кривине, средња кривина зависи од избора векторског поља нормала.

**Дефиниција 1.11** Минимална површ простора  $\mathbf{R}^3$  је регуларна површ чија је средња кривина идентички једнака нули.

**Теорема 1.1** Нека је  $\mathcal{M}$  регуларна површ простора  $\mathbf{R}^3$ . Тада за њену Гаусову, средњу и главне кривине важе следеће једнакости:

$$K = k_1 k_2 \quad \text{и} \quad H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

**Доказ:** Уколико за базне векторе тангентног векторског простора  $T_p \mathcal{M}$  одаберемо сопствене векторе оператора облика површи  $\mathcal{M}$ , тада је матрична репрезентација оператора облика дата са

$$\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}.$$

Одатле је  $K = \det \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} = k_1 k_2$  и  $H = \frac{1}{2} \text{tr} \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ . □

**Дефиниција 1.12** За тачку  $\mathbf{p}$  регуларне површи  $\mathcal{M} \subset \mathbf{R}^3$  кажемо да је

- **елиптичка**, уколико важи  $K(\mathbf{p}) > 0$  (то јест ако су главне кривине истог знака);
- **хиперболичка**, уколико важи  $K(\mathbf{p}) < 0$  (то јест ако су главне кривине различитог знака);
- **параболичка**, уколико важи  $K(\mathbf{p}) = 0$  и  $S(\mathbf{p}) \neq 0$  (то јест ако је тачно једна од главних кривина једнака нули);
- **планарна**, уколико важи  $K(\mathbf{p}) = 0$  и  $S(\mathbf{p}) = 0$  (то јест ако су обе главне кривине једнаке нули).

## 1.5 Кристофелови симболи

**Дефиниција 1.13** Нека је  $\mathbf{x} : U \mapsto \mathbf{R}^n$  елементарна регуларна површ. Тада су **Кристофелови**<sup>3</sup> **симболи** површи  $\mathbf{x}$  дати са

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Gamma_{11}^1 = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{11}^2 = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}, \\ \Gamma_{12}^1 = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{12}^2 = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}, \\ \Gamma_{22}^1 = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{22}^2 = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}. \end{array} \right.$$

И важи  $\Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^1$  и  $\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2$ .

<sup>3</sup>Elwin Bruno Christoffel (1829-1900), немачки математичар.

**Теорема 1.2 (Гаусове једнакости)** Нека је  $M \subset \mathbf{R}^3$  регуларна површ,  $\mathbf{x} : U \mapsto M$  регуларна елементарна површ и означимо са  $\mathbf{U}$  векторско поље нормала површи  $M$ . Тада важе следеће једнакости:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_v + e\mathbf{U}, \\ \mathbf{x}_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{x}_v + f\mathbf{U}, \\ \mathbf{x}_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{x}_v + g\mathbf{U}. \end{cases}$$

**Доказ:** Како је  $\mathbf{x}$  регуларна елементарна површ, вектори  $\mathbf{x}_u$ ,  $\mathbf{x}_v$  и  $\mathbf{U}$ , чине базу тангентног простора  $T_p\mathbf{R}^3$  у свакој тачки  $p$  површи  $\mathbf{x}$ . Према томе, важи

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{uu} &= \lambda_1 \mathbf{x}_u + \lambda_2 \mathbf{x}_v + \lambda_3 \mathbf{U}, \\ \mathbf{x}_{uv} &= \mu_1 \mathbf{x}_u + \mu_2 \mathbf{x}_v + \mu_3 \mathbf{U}, \\ \mathbf{x}_{vv} &= \nu_1 \mathbf{x}_u + \nu_2 \mathbf{x}_v + \nu_3 \mathbf{U}, \end{cases} \quad (1.3)$$

где су  $\lambda_i, \mu_i, \nu_i, i = 1, 2, 3$ , неки реални бројеви, које ћемо одредити. Важе следеће једнакости:

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{U} = 1 \quad \text{и} \quad \mathbf{U} \cdot \mathbf{x}_u = \mathbf{U} \cdot \mathbf{x}_v = 0.$$

Из претходних двеју једнакости и дефиниције 1.9, следи:

$$e = \lambda_3, \quad f = \mu_3 \quad \text{и} \quad g = \nu_3.$$

Помножимо сваку од једнакости (1.3) скаларно са  $\mathbf{x}_u$  и  $\mathbf{x}_v$ . Добијамо:

$$\begin{cases} \lambda_1 E + \lambda_2 F &= \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \|\mathbf{x}_u\|^2 = \frac{E_u}{2}, \\ \lambda_1 F + \lambda_2 G &= \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v &= \frac{\partial}{\partial u} (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v) - \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{uv} = F_u - \frac{E_v}{2}, \\ \mu_1 E + \mu_2 F &= \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_u &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \|\mathbf{x}_u\|^2 = \frac{E_v}{2}, \\ \mu_1 F + \mu_2 G &= \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \|\mathbf{x}_v\|^2 = \frac{G_u}{2}, \\ \nu_1 E + \nu_2 F &= \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_u &= \frac{\partial}{\partial v} (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v - \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_{uv}) = F_v - \frac{G_u}{2}, \\ \nu_1 F + \nu_2 G &= \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_v &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \|\mathbf{x}_v\|^2 = \frac{G_v}{2}. \end{cases} \quad (1.4)$$

Прве две од једнакости (1.4), могу се решити по  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , независно од осталих. Једноставно се добија:  $\lambda_1 = \Gamma_{11}^1$  и  $\lambda_2 = \Gamma_{11}^2$ . Слично се одређују и остали непознати коефицијенти, чиме је теорема доказана.  $\square$

# Глава 2

## Геодезијске криве

---

Ова глава представља главни увод у разматрања која следе. У оквиру наредних шест поглавља дајемо опширан преглед геометрије геодезијских кривих. Иако су нека тврђења општијег карактера, нашу пажњу усредсређујемо на простор  $\mathbf{R}^3$ . Циљ нам је да познате чињенице детаљно и систематски изложимо, те презентована материја, на моменте, превазилази оквире онога што је потребно за разумевање каснијих резултата.

### 2.1 Геодезијска кривина и торзија

Нека је  $\mathcal{M} \subset \mathbf{R}^n$  регуларна површ и нека је  $\beta : (c, d) \mapsto \mathcal{M}$  крива брзине један. Убрзање  $\beta''$ , криве  $\beta$ , можемо разложити на две компоненте: тангентну компоненту и компоненту нормале површи  $\mathcal{M}$ . У складу са тим, важи

$$\beta''(s) = \beta''(s)^\top + \beta''(s)^\perp, \quad \forall s \in (c, d),$$

где вектор  $\beta''(s)^\top$  припада тангентном простору  $T_{\beta(s)}\mathcal{M}$  површи  $\mathcal{M}$  у тачки  $\beta(s)$ , док је вектор  $\beta''(s)^\perp$  ортогоналан на површ  $\mathcal{M}$  у тачки  $\beta(s)$ .

**Дефиниција 2.1** Нека је  $\beta : (c, d) \mapsto \mathcal{M}$  крива брзине један, тада су њена **неозначена геодезијска кривина**  $\tilde{k}_g(\beta)$  и **кривина нормале**  $k_n(\beta)$ , редом дате са

$$\tilde{k}_g(\beta(s)) = \|\beta''(s)^\top\| \quad \text{и} \quad k_n(\beta(s)) = \|\beta''(s)^\perp\|.$$

Неозначену геодезијску кривину и кривину нормале произвољне криве  $\alpha : (a, b) \mapsto \mathcal{M}$ , дефинишемо као неозначену и кривину нормале произвољне репараметризације брзине један криве  $\alpha$ .

Следећа лема даје једноставну везу између кривина  $\tilde{k}_g(\beta)$  и  $k_n(\beta)$  и кривине криве  $k(\beta)$ .

**Лема 2.1** Нека је  $\mathcal{M} \subset \mathbf{R}^n$  регуларна површ и нека је  $\beta : (c, d) \mapsto \mathcal{M}$  крива брзине један. Тада су неозначена геодезијска, кривина нормале криве  $\beta$  и кривина криве  $\beta$  (ако је разматрамо као криву простора  $\mathbf{R}^n$ ), везане следећом једнакошћу:

$$k(\boldsymbol{\beta})^2 = \tilde{k}_g(\boldsymbol{\beta})^2 + k_n(\boldsymbol{\beta})^2.$$

**Доказ:** Важе следеће једнакости:

$$k(\boldsymbol{\beta}(s))^2 = \|\boldsymbol{\beta}''(s)\|^2 = \|\boldsymbol{\beta}''(s)^\top\|^2 + \|\boldsymbol{\beta}''(s)^\perp\|^2 = \tilde{k}_g(\boldsymbol{\beta})^2 + k_n(\boldsymbol{\beta})^2.$$

□

Сада се усредсређујемо на оријентисане регуларне површи  $\mathcal{M}$  простора  $\mathbf{R}^3$ .

**Дефиниција 2.2** Нека је  $\mathcal{M} \subset \mathbf{R}^3$  оријентисана регуларна површи. Тада је **геодезијска кривина**  $k_g$  криве  $\boldsymbol{\beta} : (c, d) \mapsto \mathcal{M}$  дата са

$$\boldsymbol{\beta}''(s)^\top = k_g(\boldsymbol{\beta}(s))J\boldsymbol{\beta}'(s) = k_g(\boldsymbol{\beta}(s))\mathbf{U} \times \boldsymbol{\beta}'(s), \quad \forall s \in (c, d),$$

где је  $\mathbf{U}$  векторско поље јединичних нормала површи  $\mathcal{M}$ .

**Последица 2.1** Нека је  $\mathcal{M} \subset \mathbf{R}^3$  оријентисана регуларна површи и нека је  $\boldsymbol{\beta} : (c, d) \mapsto \mathcal{M}$  крива брзине један. Тада важи:

$$|k_g(\boldsymbol{\beta})| = \tilde{k}_g(\boldsymbol{\beta}) \quad \text{и} \quad k(\boldsymbol{\beta})^2 = k_g(\boldsymbol{\beta})^2 + k_n(\boldsymbol{\beta})^2.$$

**Доказ:** Важи:

$$\tilde{k}_g(\boldsymbol{\beta}(s)) = \|\boldsymbol{\beta}''(s)^\top\| = \|k_g(\boldsymbol{\beta}(s))J\boldsymbol{\beta}'(s)\| = |k_g(\boldsymbol{\beta}(s))| \|J\boldsymbol{\beta}'(s)\| = |k_g(\boldsymbol{\beta}(s))|.$$

□

Следе неке карактеризације геодезијске кривине и кривине нормале.

**Лема 2.2** Нека је  $\mathcal{M} \subset \mathbf{R}^3$  оријентисана регуларна површи и нека је  $\mathbf{U}$  векторско поље јединичних нормала површи  $\mathcal{M}$ . Нека је, даље,  $\mathbf{v}_p$  јединични тангентни вектор површи  $\mathcal{M}$  у тачки  $p$ . Ако је  $\boldsymbol{\beta} : (c, d) \mapsto \mathcal{M}$  произвољна крива брзине један, онда важи

$$k_n(\boldsymbol{\beta}(s)) = \mathbf{k}(\mathbf{v}_p),$$

где је  $\mathbf{k}(\mathbf{v}_p)$  кривина нормале површи  $\mathcal{M}$  у правцу вектора  $\mathbf{v}_p$ .

**Доказ:** Према дефиницији кривине у правцу тангентног вектора, важи

$$\mathbf{k}(\mathbf{v}_p) = S(\mathbf{v}_p) \cdot \mathbf{v}_p = S(\boldsymbol{\beta}'(s)) \cdot \boldsymbol{\beta}'(s),$$

где је  $S$  оператор облика површи  $\mathcal{M}$  за који, на основу леме 1.5, важи  $S(\boldsymbol{\beta}'(s)) \cdot \boldsymbol{\beta}'(s) = \boldsymbol{\beta}''(s) \cdot \mathbf{U}$ . Будући да вектор  $(\boldsymbol{\beta}''(s) \cdot \mathbf{U})\mathbf{U}$  представља компоненту вектора убрзања  $\boldsymbol{\beta}''(s)$  која је ортогонална на површ  $\mathcal{M}$ , тврђење леме следи на основу дефиниције кривине нормале  $k_n(\boldsymbol{\beta})$ . □

**Лема 2.3** Нека је  $\mathcal{M} \subset \mathbf{R}^3$  оријентисана регуларна површи,  $\mathbf{U}$  векторско поље јединичних нормала површи  $\mathcal{M}$  и нека је  $\boldsymbol{\alpha} : (a, b) \mapsto \mathcal{M}$  произвољна крива. Тада су кривина нормале и геодезијска кривина криве  $\boldsymbol{\alpha}$ , за  $t \in (a, b)$ , дате са

$$k_n(\boldsymbol{\alpha}(t)) = \frac{\boldsymbol{\alpha}''(t) \cdot \mathbf{U}}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|^2}, \quad (2.1)$$

$$k_g(\boldsymbol{\alpha}(t)) = \frac{[\boldsymbol{\alpha}''(t), \mathbf{U}, \boldsymbol{\alpha}'(t)]}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|^3} = \frac{\boldsymbol{\alpha}''(t) \cdot J\boldsymbol{\alpha}'(t)}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|^3}. \quad (2.2)$$



**Доказ:** Нека је  $\beta$  репараметризација брзине један криве  $\alpha$ . Тада важи  $\alpha(t) = \beta(s(t))$ , за  $a < t < b$ , где је  $s$  функција дужине лука криве  $\alpha$ . Даље је

$$\alpha'(t) = s'(t)\beta'(s(t))$$

и

$$\alpha''(t) = s''(t)\beta'(s(t)) + s'(t)^2\beta''(s(t)).$$

На основу претходног, важи

$$k_n(\alpha(t)) = k_n(\beta(s(t))) = \beta''(s(t)) \cdot \mathbf{U} = \frac{\alpha''(t) \cdot \mathbf{U}}{s'(t)^2}.$$

Из чињенице да важи  $s'(t) = \|\alpha'(t)\|$ , добијамо једнакост (2.1).

Докажимо једнакост (2.2). Приметимо да важи

$$\begin{aligned} \alpha''(t) \times \alpha'(t) &= (s''(t)\beta'(s(t)) + s'(t)^2\beta''(s(t))) \times s'(t)\beta'(s(t)) \\ &= s'(t)^3\beta''(s(t)) \times \beta'(s(t)). \end{aligned}$$

Одатле добијамо

$$[\alpha''(t), \mathbf{U}, \alpha'(t)] = -\mathbf{U}(\alpha''(t) \times \alpha'(t)) = -s'(t)^3\mathbf{U} \cdot (\beta''(s(t)) \times \beta'(s(t))).$$

Стога важи

$$\begin{aligned} k_g(\alpha(t)) &= k_g(\beta(s(t))) = \beta''(s(t)) \cdot J\beta'(s(t)) \\ &= \beta''(s(t)) \cdot (\mathbf{U} \times \beta'(s(t))) = \frac{[\alpha''(t), \mathbf{U}, \alpha'(t)]}{s'(t)^3}, \end{aligned}$$

одакле следи једнакост (2.2). □

Непосредна последица претходне леме је да је, у дводимензионом случају, геодезијска кривина једнака кривини криве у равни. Сада ћемо показати да је геодезијска кривина унутрашња карактеристика површи простора  $\mathbf{R}^3$ .

**Теорема 2.1** Нека је  $\mathcal{M}$  површ простора  $\mathbf{R}^3$ ,  $\mathbf{x} : U \mapsto \mathcal{M}$  елементарна површ и  $\alpha : (a, b) \mapsto \mathcal{M}$  крива елементарне површи  $\mathbf{x}$ . Уколико означимо  $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ , за  $a < t < b$ , тада важи

$$\begin{aligned} k_g(\alpha)\|\alpha'\|^3 &= \sqrt{EG - F^2} (-\Gamma_{11}^2 u'^3 + \Gamma_{22}^1 v'^3 - (2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) u'^2 v' \\ &\quad + (2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2) u' v'^2 + u'' v' - v'' u'). \end{aligned} \tag{2.3}$$

**Доказ:** Будући да важи  $\alpha' = \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v'$  и

$$\alpha'' = \mathbf{x}_{uu} u'^2 + 2\mathbf{x}_{uv} u' v' + \mathbf{x}_{vv} v'^2 + \mathbf{x}_u u'' + \mathbf{x}_v v'',$$

следи

$$\begin{aligned} \alpha'' \times \alpha' &= (\mathbf{x}_{uu} \times \mathbf{x}_u) u'^3 + (\mathbf{x}_{vv} \times \mathbf{x}_v) v'^3 + (\mathbf{x}_{uu} \times \mathbf{x}_v + 2\mathbf{x}_{uv} \times \mathbf{x}_u) u'^2 v' \\ &\quad + (\mathbf{x}_{vv} \times \mathbf{x}_u + 2\mathbf{x}_{uv} \times \mathbf{x}_v) u' v'^2 + (u'' v' - v'' u') \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v. \end{aligned}$$

Даље добијамо

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\alpha}'' \times \boldsymbol{\alpha}') \cdot (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) &= (\mathbf{x}_{uu} \times \mathbf{x}_u) \cdot (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) u'^3 + (\mathbf{x}_v \times \mathbf{x}_v) \cdot (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) v'^3 \\
&+ (\mathbf{x}_{uu} \times \mathbf{x}_v + 2\mathbf{x}_{uv} \times \mathbf{x}_u) \cdot (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) u'^2 v' \\
&+ (\mathbf{x}_v \times \mathbf{x}_u + 2\mathbf{x}_{uv} \times \mathbf{x}_v) \cdot (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) u' v'^2 + (u'' v' - v'' u') \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|^2.
\end{aligned}$$

Сада је потребно коефицијенте уз  $u'^3$ ,  $v'^3$ ,  $u'^2 v'$  и  $u' v'^2$ , у претходној једнакости, изразити преко коефицијената прве фундаменталне форме  $E$ ,  $F$  и  $G$  и Кристофелових симбола. Користећи Лагранжов<sup>1</sup> идентитет и дефиницију Кристофелових симбола, добијамо

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x}_{uu} \times \mathbf{x}_u) \cdot (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) &= (\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u)(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v) - (\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v \|\mathbf{x}_u\|^2) \\
&= \frac{1}{2} E_u F - \left( F_u - \frac{1}{2} E_v \right) E = -(EG - F^2) \Gamma_{11}^2.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Слично добијамо и једнакости:

$$(\mathbf{x}_{vv} \times \mathbf{x}_v) \cdot (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) = (EG - F^2) \Gamma_{22}^1, \tag{2.5}$$

$$(\mathbf{x}_{uu} \times \mathbf{x}_v + 2\mathbf{x}_{uv} \times \mathbf{x}_u) \cdot (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) = (EG - F^2)(\Gamma_{11}^1 - 2\Gamma_{12}^2), \tag{2.6}$$

односно

$$(\mathbf{x}_{vv} \times \mathbf{x}_u + 2\mathbf{x}_{uv} \times \mathbf{x}_v) \cdot (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) = -(EG - F^2)(\Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1). \tag{2.7}$$

Заменом једнакости (2.4)–(2.7) у полазну, добијамо једнакост (2.3).  $\square$

**Дефиниција 2.3** Нека је  $\mathcal{M}$  оријентисана регуларна површ простора  $\mathbf{R}^n$ . Тада је **геодезијска торзија**  $\tau_g(\boldsymbol{\alpha})$ , криве  $\boldsymbol{\alpha} : (a, b) \mapsto \mathcal{M}$ , дефинисана са

$$\tau_g(\boldsymbol{\alpha}(t)) = \frac{S\boldsymbol{\alpha}'(t) \cdot J'\boldsymbol{\alpha}'(t)}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|^2}, \quad \forall t \in (a, b).$$

Следећа лема се једноставно доказује.

**Лема 2.4** Дефиниција геодезијске торзије не зависи од параметризације криве. Такође, геодезијска торзија криве је једнака нули у тачки  $t$  ако и само ако крива одређује главну кривину површи у тој тачки.

Аналогон Френеовом<sup>2</sup> реперу, криве простора  $\mathbf{R}^3$ , уколико криву разматрамо као део неке површи је Дарбуов<sup>3</sup> репер.

**Дефиниција 2.4** Нека су  $\mathcal{M}$  оријентисана регуларна површ простора  $\mathbf{R}^3$ ,  $\mathbf{U}$  векторско поље јединичних нормала површи  $\mathcal{M}$  и  $\boldsymbol{\alpha} : (a, b) \mapsto \mathcal{M}$  произвољна крива. Означимо са  $J$  комплексну структуру површи  $\mathcal{M}$  одређену пољем  $\mathbf{U}$  и нека је  $\mathbf{T} = \frac{\boldsymbol{\alpha}'}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}$ . Тројку векторских поља  $\{\mathbf{T}, J\mathbf{T}, \mathbf{U}\}$  називамо (**покретни**) **Дарбуов репер** криве  $\boldsymbol{\alpha}$  у односу на површ  $\mathcal{M}$ .

<sup>1</sup>Joseph Louis Lagrange (1736-1813), француски математичар.

<sup>2</sup>Jean Frédéric Frenet (1816-1900), француски математичар.

<sup>3</sup>Jean Gaston Darboux (1842-1917), француски математичар.

**Теорема 2.2** Нека је  $\beta : (c, d) \mapsto M \subset \mathbf{R}^3$  крива брзине један и нека је  $\{\mathbf{T}, J\mathbf{T}, \mathbf{U}\}$  Дарбуов репер криве  $\beta$  у односу на површ  $M$ . Тада важе Дарбуове формуле:

$$\begin{cases} \mathbf{T}' &= & k_g J\mathbf{T} & + k_n \mathbf{U}, \\ (J\mathbf{T})' &= & -k_g \mathbf{T} & + \tau_g \mathbf{U}, \\ \mathbf{U}' &= & -k_n \mathbf{T} & - \tau_g J\mathbf{T}. \end{cases}$$

**Доказ:** Важе следеће једнакости:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}' &= (\mathbf{T}' \cdot J\mathbf{T})J\mathbf{T} + (\mathbf{T}' \cdot \mathbf{U})\mathbf{U} \\ &= (\beta'' \cdot J\mathbf{T})J\mathbf{T} + (\beta'' \cdot \mathbf{U})\mathbf{U} = k_g J\mathbf{T} + k_n \mathbf{U}. \end{aligned}$$

Преостале две једнакости доказују се на сличан начин.  $\square$

**Последица 2.2** Нека је  $\alpha : (a, b) \mapsto M \subset \mathbf{R}^3$  крива брзине  $v = \|\alpha'\|$  и нека је  $\{\mathbf{T}, J\mathbf{T}, \mathbf{U}\}$  Дарбуов репер криве  $\alpha$  у односу на површ  $M$ . Тада важи:

$$\begin{cases} \mathbf{T}' &= & vk_g J\mathbf{T} & + vk_n \mathbf{U} \\ (J\mathbf{T})' &= & -vk_g \mathbf{T} & + v\tau_g \mathbf{U} \\ \mathbf{U}' &= & -vk_n \mathbf{T} & - v\tau_g J\mathbf{T}. \end{cases}$$

## 2.2 Геодезијске једначине

**Дефиниција 2.5** Нека је  $M$  регуларна површ простора  $\mathbf{R}^3$ . За криву  $\gamma : (a, b) \mapsto M$ , константне брзине, кажемо да је **геодезијска**, уколико је њена геодезијска кривина једнака нули у свакој тачки домена, односно да је **асимптотска**, уколико претходно важи за њену кривину нормале.

Наредна лема је директна последица дефиниције 2.1.

**Лема 2.5** Крива  $\gamma : (a, b) \mapsto M$ , константне брзине, је геодезијска (односно асимптотска), уколико је тангентна компонента (односно, компонента нормале) њеног вектора убрзања  $\gamma''$ , једнака нули на целом домену.

**Лема 2.6** Крива  $\gamma : (a, b) \mapsto M$ , константне брзине, је истовремено геодезијска и асимптотска ако и само ако је она права линија.

**Доказ:** На основу претходне леме, крива  $\gamma$  је истовремено геодезијска и асимптотска ако и само ако важи  $\gamma''(t) \equiv 0$ ,  $\forall t \in (a, b)$ , што је еквивалентно томе да је крива  $\gamma$  облика  $\gamma = \mathbf{p}t + \mathbf{q}$ , за неке векторе  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{R}^3$ , одакле следи тврђење.  $\square$

**Лема 2.7 (геодезијске једначине)** Нека је  $M \subset \mathbf{R}^3$  површ параметризована регуларном елементарном површи  $\mathbf{x} : U \subset \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}^3$ . Тада су геодезијске криве површи  $M$  одређене следећим системом диференцијалних једначина другог реда:

$$\begin{cases} u'' + \Gamma_{11}^1 u'^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 v'^2 = 0, \\ v'' + \Gamma_{11}^2 u'^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 v'^2 = 0, \end{cases} \quad (2.8)$$

где су  $\Gamma_{jk}^i$  Кристофелови симболи елементарне површи  $\mathbf{x}$ .

**Доказ:** Нека је  $\gamma : (a, b) \mapsto \mathcal{M}$  крива константне брзине. Можемо писати

$$\gamma(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t)),$$

где су  $u, v : (a, b) \mapsto \mathcal{M}$  диференцијабилне функције. Диференцирањем претходне једнакости добијамо

$$\gamma'' = \mathbf{x}_{uu}u'^2 + \mathbf{x}_u u'' + 2\mathbf{x}_{uv}u'v' + \mathbf{x}_{vv}v'^2 + \mathbf{x}_v v''.$$

На основу теореме 1.2, следи

$$\begin{aligned} \gamma''(t) &= (u'' + \Gamma_{11}^1 u'^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 v'^2)\mathbf{x}_u \\ &+ (v'' + \Gamma_{11}^2 u'^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 v'^2)\mathbf{x}_v \\ &+ (eu'^2 + 2fu'v' + gv'^2)\mathbf{U}, \end{aligned}$$

где је

$$\mathbf{U} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|},$$

векторско поље јединичних нормала површи  $\mathcal{M}$ . Крива  $\gamma$  је геодезијска, уколико су коефицијенти уз  $\mathbf{x}_u$  и  $\mathbf{x}_v$ , у претходној једнакости, једнаки нули, чиме је лема доказана.  $\square$

**Напомена 2.1** Геодезијске једначине (2.8), често се решавају нумеричким методама, те се зато разматрају као систем од четири диференцијалне једначине првог реда:

$$\begin{cases} u' = p, \\ v' = q, \\ p' = -\Gamma_{11}^1 p^2 - 2\Gamma_{12}^1 pq - \Gamma_{22}^1 q^2, \\ q' = -\Gamma_{11}^2 p^2 - 2\Gamma_{12}^2 pq - \Gamma_{22}^2 q^2. \end{cases} \quad (2.9)$$

**Теорема 2.3** Нека је  $\mathbf{v}_p$  тангентни вектор у тачки  $\mathbf{p}$  површи  $\mathcal{M}$ . Тада постоји геодезијска крива  $\gamma$ , параметризована на неком интервалу који садржи нулу, таква да важи  $\gamma(0) = \mathbf{p}$  и  $\gamma'(0) = \mathbf{v}_p$ . Штавише, сваке две геодезијске криве, које задовољавају претходна два услова, су идентички једнаке на сваком интервалу који садржи нулу и на ком су обе дефинисане.

**Доказ:** Нека је  $\mathbf{x} : U \mapsto \mathcal{M}$  регуларна елементарна површ таква да важи  $\mathbf{x}(0, 0) = \mathbf{p}$ . Систем једначина (2.8) одређује геодезијске криве које припадају елементарној површи  $\mathbf{x}$ . Означимо  $\gamma(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$  и  $\mathbf{v}_p = (v_1, v_2)$ . Почетне услове, које задовољава крива  $\gamma$ , можемо записати на следећи начин:

$$\begin{cases} u(0) = 0 \\ v(0) = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} u'(0) = v_1 \\ v'(0) = v_2. \end{cases}$$

Из теорије диференцијалних једначина је познато да систем (2.8), заједно са горњим почетним условима, има јединствено решење на неком интервалу који садржи нулу одакле следи тврђење теореме.  $\square$

Нека су  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  геодезијске криве неке површи које задовољавају исте почетне услове. Тада су оне идентички једнаке на неком интервалу. Јасно је да, у том случају, постоји геодезијска крива  $\gamma$  дефинисана на унији домена дефинисаности кривих  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  која је у свакој тачки идентички једнака (најмање) једној од њих две. Такву геодезијску криву називамо **продужењем** геодезијске криве  $\gamma_i$ , за  $i = 1, 2$ . Настављајући тај поступак добијамо

јединствено **максимално продужење** које називамо **максимална геодезијска крива** (која задовољава исте почетне услове као и криве  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ ). Домен дефинисаности максималне геодезијске криве називамо **максималан интервал** и он може, али и не мора, бити цела реална права, али у сваком случају можемо дати следећу дефиницију.

**Дефиниција 2.6** Површ  $M$  је **геодезијски комплетна**, уколико је свака максимална геодезијска крива површи  $M$  дефинисана на целом скупу  $\mathbf{R}$ .

Једноставно се проверава да су сфера  $S^2$  и раван геодезијски комплетне површи. Штавише, свака компактна површ је геодезијски комплетна. С друге стране, површ  $\mathbf{R}^2 \setminus (0, 0)$  није геодезијски комплетна, јер геодезијска крива  $t \mapsto (t, 0)$  не може бити максимално продужена.

Врло је важно разликовати геодезијску криву (која је функција) од њеног трага (то јест скупа који представља кодомен функције), јер он може бити и траг неке друге криве која није константне брзине.

**Дефиниција 2.7** За криву  $\alpha : (a, b) \mapsto M$  кажемо да је **прегеодезијска**, уколико постоји њена репараметризација  $\alpha \circ h : (c, d) \mapsto M$  која је геодезијска крива.

**Пример 2.1 (ротационе површи)** Подсетимо се основних дефиниција везаних за ротационе површи.

**Дефиниција 2.8** Нека је  $\sigma$  раван простора  $\mathbf{R}^3$ , нека је  $s$  права равни  $\sigma$  и означимо са  $S$  произвољан скуп тачака равни  $\sigma$ . Скуп тачака који се добија ротирањем скупа  $S$  око праве  $s$  називамо **ротациона површ** генерисана скупом  $S$ . Праву  $s$  зовемо **оса ротације**.

Уобичајено је да се за раван  $\sigma$  узима  $xz$ -раван, а за праву  $s$ ,  $z$ -оса. Претпоставимо да скуп тачака  $S$  има диференцијабилну параметризацију  $\alpha : (a, b) \mapsto S$ . Тада можемо писати  $\alpha = (\varphi, \psi)$ .

**Дефиниција 2.9** Елементарну површ  $r(\alpha) : [0, 2\pi] \times (a, b) \mapsto \mathbf{R}^3$  дефинисану са

$$rotaciona(\alpha)(u, v) = (\varphi(v) \cos u, \varphi(v) \sin(u), \psi(v)), \quad (2.10)$$

називамо **стандардна параметризација ротационе површи**.

**Напомена 2.2** У претходној дефиницији често се додаје и услов  $\varphi(v) \geq 0$ , како скуп  $S$  не би пресецао осу  $s$ .

**Дефиниција 2.10** Нека је  $M$  ротациона површ простора  $\mathbf{R}^3$ . Криву  $\alpha : (a, b) \mapsto M$  која представља пресек ротационе површи  $M$  и равни која садржи осу ротације називамо **меридијан**, док криву која представља пресек ротационе површи и равни која је ортогонална на осу ротације називамо **паралела** ротационе површи.

**Теорема 2.4** Сваки меридијан ротационе површи  $M \subset \mathbf{R}^3$  може бити параметризован тако да постане геодезијска крива.

**Доказ:** Нека је  $\gamma$  параметризација брзине један меридијана ротационе површи  $M$  и нека је  $\chi$  раван која садржи криву  $\gamma$  и осу ротације. Будући да је  $\gamma$  раванска крива, јединична нормала  $N = J\gamma'$ , такође, припада равни  $\chi$ . Како је раван  $\chi$  ортогонална на површ  $M$ , то је и јединична нормала  $N$  ортогонална на  $M$ . Стога је и вектор  $\gamma'' = kN$ , где је  $k$  кривина раванске криве  $\gamma$ , ортогоналан на површ  $M$ , одакле следи да је крива  $\gamma$  геодезијска.  $\square$

**Пример 2.2 (сфера)**

**Лема 2.8** Нека је  $M$  оријентабилна површ простора  $\mathbf{R}^3$  и  $\gamma : (a, b) \mapsto M$  геодезијска крива површи  $M$ , чија је кривина различита од нуле у свакој тачки домена. Означимо са  $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$  Френеов покретни репер криве  $\gamma$  и нека су  $k$  и  $\tau$  кривина и торзија криве  $\gamma$ . Тада је могуће одабрати векторско поље јединичних нормала  $\mathbf{U}$  површи  $M$  такво да важи

$$S(\mathbf{T}) = k\mathbf{T} - \tau\mathbf{B},$$

где је  $S$  оператор облика површи  $M$ , у односу на векторско поље  $\mathbf{U}$ .

**Доказ:** Како је кривина  $k$  различита од нуле за свако  $t \in (a, b)$ , векторско поље  $\mathbf{N}$  је дефинисано на целом интервалу  $(a, b)$ . Чињеница да је  $\gamma$  геодезијска крива имплицира да је вектор  $\mathbf{N} = \frac{\gamma''}{k}$  ортогоналан на површ  $M$  за свако  $t \in (a, b)$ . Следи да је могуће изабрати векторско поље јединичних нормала такво да важи

$$\mathbf{N}(t) = \mathbf{U}(\gamma(t)),$$

за  $a < t < b$ . На основу дефиниције оператора облика и Френеових формула, добијамо

$$S(\mathbf{T}) = \frac{d}{dt}\mathbf{U}(\gamma(t)) = -\mathbf{N}' = k\mathbf{T} - \tau\mathbf{B}.$$

□

**Лема 2.9** Геодезијска крива сфере  $\mathbf{S}^2$  полупречника  $c > 0$  је део великог круга.

**Доказ:** Нека је  $\gamma : (a, b) \mapsto \mathbf{S}^2$  нетривијална (то јест различита од тачке) геодезијска крива. Њена кривина је различита од нуле (јер припада сфери). Пошто су главне кривине у свакој тачки сфере једнаке, важи

$$S(\mathbf{T}) = \frac{1}{c}\mathbf{T}.$$

Из претходне једнакости и на основу претходне леме закључујемо да је кривина криве  $\gamma$  константна и једнака  $\frac{1}{c}$ , док је њена торзија идентички једнака нули одакле следи да је крива  $\gamma$  део круга полупречника  $c$ , то јест великог круга сфере  $\mathbf{S}^2$ . □■

## 2.3 Клероове елементарне површи

**Дефиниција 2.11** Нека је  $M \subset \mathbf{R}^3$  површ чија је метрика дефинисана на следећи начин:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

(а)  $u$ -Клероова<sup>4</sup> елементарна површ је елементарна површ  $\mathbf{x} : U \mapsto M$  за чије коефицијенте прве фундаменталне форме важи

$$E_v = G_v = F = 0.$$

<sup>4</sup>Alexis Claude Clairaut (1713–1765), француски математичар.

(б)  $v$ -Клероова елементарна површ је елементарна површ  $\mathbf{x} : U \mapsto M$  за чије коефицијенте прве фундаменталне форме важи

$$E_u = G_u = F = 0.$$

У случају Клероових елементарних површи Кристофелови симболи и геодезијске једначине (2.8) имају знатно једноставнији облик. Наредна лема се директно доказује.

**Лема 2.10** Нека је  $\mathbf{x} : U \mapsto M$   $v$ -Клероова елементарна површ. Тада су Кристофелови симболи и геодезијске једначине површи  $\mathbf{x}$  редом дати са

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = 0, & \Gamma_{11}^2 = \frac{-E_v}{2G}, \\ \Gamma_{12}^1 = \frac{E_v}{2E}, & \Gamma_{12}^2 = 0, \\ \Gamma_{22}^1 = 0, & \Gamma_{22}^2 = \frac{G_v}{2G}, \end{cases} \quad (2.11)$$

односно

$$\begin{cases} u'' + \frac{E_v}{E}u'v' = 0, \\ v'' + \frac{E_v}{2G}u'^2 + \frac{G_v}{2G}v'^2 = 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

**Лема 2.11** Нека је  $\mathbf{x} : U \mapsto M$   $v$ -Клероова елементарна површ. Тада важи:

- (а) свака  $v$ -параметарска крива елементарне површи  $\mathbf{x}$  је прегеодезијска;
- (б)  $u$ -параметарска крива  $u \mapsto \mathbf{x}(u, v_0)$  је геодезијска ако и само ако важи  $E_v(u, v_0) \equiv 0$ , дуж криве  $u \mapsto \mathbf{x}(u, v_0)$ .

**Доказ:** Оба тврђења леме су директне последице једнакости (2.3).  $\square$

**Теорема 2.5 (Клероова једнакост)** Нека је  $\mathbf{x} : U \mapsto M$   $v$ -Клероова елементарна површ и нека је  $\gamma$  геодезијска крива елементарне површи  $\mathbf{x}$ . Означимо са  $\theta$  угао између криве  $\gamma$  и вектора  $\mathbf{x}_u$ . Тада важи

$$\sqrt{E}\|\gamma'\| \cos \theta = Eu' = \text{const}, \text{ дуж криве } \gamma.$$

**Доказ:** Нека је  $\gamma(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ . Будући да важи  $E_u = 0$ , на основу прве од једнакости (2.12), следи

$$(Eu')' = E'u' + Eu'' = E_v u'v' + Eu'' = 0.$$

Дакле, постоји константа  $c$  за коју важи

$$Eu' = c. \quad (2.13)$$

Даље важи

$$\|\gamma'\| \cos \theta = \frac{\mathbf{x}_u \cdot \gamma'}{\|\mathbf{x}_u\|} = \frac{\mathbf{x}_u \cdot (\mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v')}{\|\mathbf{x}_u\|} = \|\mathbf{x}_u\|u' = \sqrt{E}u'. \quad (2.14)$$

Тврђење теореме следи на основу једнакости (2.13) и (2.14).  $\square$

**Дефиниција 2.12** Константу  $c$  из једнакости (2.13) називамо **нагиб** криве  $\gamma$   $v$ -Клероове елементарне површи  $\mathbf{x}$ . Угао између криве  $\gamma$  и вектора  $\mathbf{x}_u$  је дат са

$$\cos \theta = \frac{c}{\|\gamma'\| \sqrt{E}}.$$

Сада ћемо констатовати неке прецизније информације о геодезијским кривим Клероових елементарних површи.

**Лема 2.12** Нека је  $\mathbf{x} : U \mapsto M$   $v$ -Клероова елементарна површи и нека је  $\gamma : (a, b) \mapsto M$  геодезијска крива елементарне површи  $\mathbf{x}$ , брзине један. Означимо  $\gamma(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ . Уколико је крива  $\gamma$  геодезијска, онда постоји константа  $c$ , таква да важи

$$\begin{cases} u' &= \frac{c}{E}, \\ v' &= \pm \frac{\sqrt{E - c^2}}{\sqrt{EG}}. \end{cases} \quad (2.15)$$

Обратно, уколико важе једнакости (2.15) и ако је испуњен један од следећа два услова

- (а)  $v'(t) \neq 0, \forall t \in (a, b)$ ;
- (б)  $v'(t) \equiv 0, \forall t \in (a, b)$ ,

онда је крива  $\gamma$  геодезијска.

**Доказ:** Прва од једнакости (2.15), следи из једнакости (2.13). Даље, важи

$$1 = \gamma' \cdot \gamma' = Eu'^2 + Gv'^2 = \frac{c^2}{E} + Gv'^2,$$

одакле следи

$$v' = \frac{1}{G} \left( 1 - \frac{c^2}{E} \right) = \frac{E - c^2}{EG},$$

чиме је доказана и друга једнакост.

Обратно, претпоставимо да важе једнакости (2.15). На основу прве од њих, следи

$$u'' = \left( \frac{c}{E} \right)' = -\frac{cE_v v'}{E^2} = -\frac{E_v u' v'}{E}.$$

Одакле закључујемо да је задовољена прва од једнакости (2.12). Крива  $\gamma$  је брзине један јер важи

$$\begin{aligned} \gamma' \cdot \gamma' &= (\mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v') \cdot (\mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v') \\ &= Eu'^2 + Gv'^2 = E \left( \frac{c}{E} \right)^2 + G \left( \frac{E - c^2}{EG} \right) = 1. \end{aligned}$$

Диференцирањем једнакости  $Gv'^2 = 1 - Eu'^2$ , добијамо

$$\begin{aligned} G_v v'^3 + 2Gv'v'' &= (Gv'^2)' = -E_v u'^2 v' - 2Eu'u'' \\ &= -E_v u'^2 v' + 2Eu' \left( \frac{E_v}{E} u' v' \right) = E_v u'^2 v'. \end{aligned}$$

Последица претходне једнакости је да је друга од једнакости (2.12), задовољена на сваком интервалу на коме је  $v'$  различито од нуле. С друге стране, на интервалу на коме је  $v'$  идентички једнако нули, на основу друге од једнакости (2.15), важи да је  $E$  једнако константи, одакле, такође, следи друга од једнакости (2.12).  $\square$



**Последица 2.3** Нека је  $\mathbf{x} : U \mapsto M$   $v$ -Клероова елементарна површ. Тада је крива  $\alpha : (a, b) \mapsto M$  облика

$$\alpha(u) = \mathbf{x}(u(v), u),$$

прегеодезијска ако и само ако постоји константа  $c$ , таква да важи

$$\frac{du}{dv} = \pm c \sqrt{\frac{G}{E(E-c^2)}}. \quad (2.16)$$

Константа  $c$  представља нагиб криве  $\alpha$  у односу на елементарну површ  $\mathbf{x}$ .

**Доказ:** Постоји геодезијска крива  $\gamma$  брзине један која представља репараметризацију криве  $\alpha$ , таква да важи

$$\gamma(s) = \alpha(u(s)) = \mathbf{x}(u(v(s)), v(s)).$$

На основу претходне леме, важи

$$\frac{du}{ds} = u' = \frac{c}{E} \quad \text{и} \quad \frac{dv}{ds} = \pm \frac{\sqrt{E-c^2}}{\sqrt{EG}}.$$

Одатле је

$$\frac{du}{dv} = \frac{\frac{du}{ds}}{\frac{dv}{ds}} = \frac{\frac{c}{E}}{\pm \frac{\sqrt{E-c^2}}{\sqrt{EG}}} = \pm c \sqrt{\frac{G}{E(E-c^2)}}.$$

Обратно, ако је задовољена једнакост (2.16), онда  $u'$  и  $v'$  можемо дефинисати тако да важи

$$\frac{u'}{v'} = \pm c \sqrt{\frac{G}{E(E-c^2)}} \quad \text{и} \quad Eu'^2 + Gv'^2 = 1.$$

Директно се проверава да су задовољене једнакости (2.15), па је  $\alpha$  прегеодезијска крива.  $\square$

**Пример 2.3** У примеру 2.1 доказали смо да се сваки меридијан ротационе површи може параметризовати тако да постане геодезијска крива. Сада можемо рећи нешто више и о паралелама. Стандардна параметризација ротационе површи простора  $\mathbf{R}^3$  дата је формулом (2.10). Претпоставимо да важи  $\varphi(v) > 0$ , за свако  $v$ . Тада вредност  $\varphi(v)$  можемо сматрати полупречником паралеле  $u \mapsto (\varphi(v_0) \cos u, \varphi(v_0) \sin u, \psi(v_0))$ . Непосредно се проверава да за стандардно параметризовану ротациону површ важи

$$E = \varphi(v)^2 \quad F = 0 \quad \text{и} \quad G = \varphi'(v)^2 + \psi'(v)^2.$$

Одатле следи  $E_u = F = G_u = 0$ , то јест свака ротациона површ  $\mathbf{r}$  је  $v$ -Клероова елементарна површ, па свака геодезијска крива елементарне површи  $\mathbf{r}$  задовољава једначину

$$\frac{du}{dv} = \pm \frac{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}{\varphi \sqrt{\varphi^2 - c^2}}.$$

Пошто су  $v$ -параметарске криве ротационе површи меридијани, а  $u$ -параметарске криве паралеле, следећа теорема је специјалан случај леме 2.11.

**Теорема 2.6** Нека је  $M$  ротациона површ простора  $\mathbf{R}^3$ . Тада важи

(а) сваки меридијан површи  $M$  је геодезијска крива;

(б) паралела површи  $M$  је геодезијска крива ако и само ако важи  $\varphi'(v_0) = 0$ . ■

**Пример 2.4 (псеудосфера)** Псеудосфера је ротациона површ простора  $\mathbf{R}^3$  која се добија ротацијом раванске криве  $\alpha(t) = a(\sin(t), \cos t + \ln(\operatorname{tg} \frac{t}{2}))$ ,  $a \in \mathbf{R}$ , коју називамо **трактиса**. Стандардна параметризација псеудосфере је

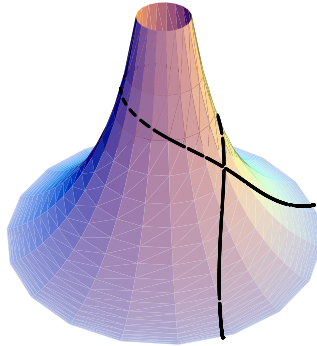
$$pseudosfera(u, v) = a(\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v + \ln(\operatorname{tg} \frac{v}{2})).$$

Једноставно се показује да псеудосфера није геодезијски комплетна површ. Наиме, сваки меридијан псеудосфере је трактиса која није диференцијабилна у нули, одакле закључујемо да не постоји параметризација константне брзине трактисе која је дефинисана у свакој тачки скупа  $\mathbf{R}$ .

Геодезијске криве псеудосфере, различите од меридијана, можемо одредити решавањем система једначина (2.12). Опште решење тог система у случају псеудосфере је

$$\gamma(t) = c_1 + \frac{\sqrt{a^2 - 2c_2^2 - a^2 \cos 2t}}{\sqrt{2}c_2 \sin t},$$

за неке константе  $c_1$  и  $c_2$ . ■



Слика 2.1 Псеудосфера,  $0 \leq u \leq 2\pi$ ,  $\frac{\pi}{2} \leq v \leq \pi$ . Линија представља геодезијску криву.

## 2.4 Експоненцијално пресликавање

**Дефиниција 2.13** Нека је  $\mathbf{p}$  произвољна тачка регуларне површи  $M$  и нека је  $\mathbf{v}_\mathbf{p} \in T_\mathbf{p}M$  тангентни вектор у тачки  $\mathbf{p}$ . Пресликавање  $\exp_\mathbf{p} : T_\mathbf{p}M \mapsto M$ , дефинисано са

$$\exp_\mathbf{p}(\mathbf{v}_\mathbf{p}) = \gamma(1),$$

где је  $\gamma$  геодезијска крива површи  $M$ , која задовољава услове  $\gamma(0) = \mathbf{p}$  и  $\gamma'(0) = \mathbf{v}_\mathbf{p}$ , називамо **експоненцијално пресликавање тангентног простора површи  $M$** .

**Лема 2.13** *За експоненцијално пресликавање важи*

$$\exp_{\mathbf{p}}(av_{\mathbf{p}}) = \gamma(at), \quad \forall a \in \mathbf{R},$$

где је  $\gamma$  геодезијска крива површи  $M$ , која задовољава услове претходне дефиниције.

**Доказ:** Нека је  $\gamma$  геодезијска крива површи  $M$ , која задовољава услове претходне дефиниције и нека је  $\gamma_a$  геодезијска крива површи  $M$  за коју важи  $\gamma_a(0) = \mathbf{p}$  и  $\gamma'_a(0) = av_{\mathbf{p}}$ , за неки фиксиран реалан број  $a$ . Тада су криве  $\gamma_a$  и  $t \mapsto \gamma(at)$  геодезијске криве које задовољавају исте почетне услове, па су оне, на основу теореме 2.3, идентички једнаке на неком интервалу који садржи нулу. Тиме је лема доказана.  $\square$

Најзначајнија особина експоненцијалног пресликавања дата је у следећој теорему. Њен доказ може се наћи, на пример, у [8].

**Теорема 2.7** *За сваку тачку  $\mathbf{p}$  површи  $M$ , постоји околина  $U_{\mathbf{p}}$  тачке  $\mathbf{0} \in T_{\mathbf{p}}M$ , која се експоненцијалним пресликавањем дифеоморфно пресликава на отворен подскуп површи  $M$ .*

**Дефиниција 2.14** *Нека је  $\mathbf{p}$  тачка површи  $M$ . Кажемо да отворен подскуп  $N_{\mathbf{p}}$  површи  $M$ , који садржи тачку  $\mathbf{p}$  представља **нормалну околину** тачке  $\mathbf{p}$ , уколико постоји отворен подскуп  $O_{\mathbf{p}}$  тангентног простора  $T_{\mathbf{p}}M$ , који се експоненцијалним пресликавањем  $\exp_{\mathbf{p}}$  дифеоморфно пресликава на скуп  $N_{\mathbf{p}}$ .*

**Дефиниција 2.15** *Нека је  $\mathbf{p}$  тачка површи  $M$ ,  $\{e_1, e_2\}$  ортонормирана база тангентног простора  $T_{\mathbf{p}}M$  и  $N_{\mathbf{p}} = \exp_{\mathbf{p}}(O_{\mathbf{p}})$  нормална околина тачке  $\mathbf{p}$ .*

(а) **Нормална елементарна површ** (у односу на тачку  $\mathbf{p}$  и базу  $\{e_1, e_2\}$ ) је пресликавање  $x : (a, b) \times (c, d) \mapsto M$  дефинисано са

$$x(u, v) = \exp_{\mathbf{p}}(ue_1 + ve_2),$$

где правоугаоник  $\{ue_1 + ve_2 \mid a < u < b, c < v < d\}$  припада скупу  $O_{\mathbf{p}}$ .

(б) **Геодезијска поларна елементарна површ** (у односу на тачку  $\mathbf{p}$  и базу  $\{e_1, e_2\}$ ) је пресликавање  $y : (0, c) \times (0, 2\pi) \mapsto M$  дефинисано са

$$y(r, \theta) = \exp_{\mathbf{p}}(r \cos \theta e_1 + r \sin \theta e_2),$$

где диск  $\{r \cos \theta e_1 + r \sin \theta e_2 \mid 0 < r < c, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$  припада скупу  $O_{\mathbf{p}}$ .

**Лема 2.14** *Нека је  $N_{\mathbf{p}}$  нормална околина тачке  $\mathbf{p} \in M$  и нека је  $\mathbf{q}$  произвољна тачка околине  $N_{\mathbf{p}}$ . Тада постоји тачно једна геодезијска крива која спаја тачке  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  и припада скупу  $N_{\mathbf{p}}$ .*

**Доказ:** Свака геодезијска крива брзине један чији је један крај тачка  $\mathbf{p}$  је  $r$ -параметарска крива поларне параметризације. Пошто је пресликавање  $\exp_{\mathbf{p}} : O_{\mathbf{p}} \mapsto N_{\mathbf{p}}$  дифеоморфизам, геодезијска крива чија је крајња тачка  $\mathbf{q}$  је јединствена.  $\square$

**Лема 2.15** *Нека је  $y : (0, c) \times (0, 2\pi) \mapsto M$  геодезијска поларна елементарна површ (у тачки  $\mathbf{p}$  површи  $M$ ). За коефицијенте прве фундаменталне форме елементарне површи  $y$  важи*

$$E = 1 \quad \text{и} \quad F = 0,$$

тако да је метрика дата са

$$ds^2 = dr^2 + G(r, \theta)d\theta^2.$$

**Доказ:** Пошто су  $r$ -параметарске криве површи  $\mathbf{y}$  геодезијске криве, имамо

$$E = \mathbf{y}_r \cdot \mathbf{y}_r = 1 \quad \text{и} \quad \mathbf{y}_{rr} = 0.$$

Штавише, важи

$$F_r = \frac{\partial(\mathbf{y}_r \cdot \mathbf{y}_\theta)}{\partial r} = \mathbf{y}_r \mathbf{y}_{\theta r} = \mathbf{y}_r \mathbf{y}_{r\theta} = \frac{E_\theta}{2} = 0,$$

тако да је  $F$  једнако константи дуж сваке  $r$ -параметарске криве. С друге стране, једноставно се показује да важи  $F(0, \theta) = 0$ . На основу претходне две чињенице закључујемо да је  $F$  идентички једнако нули на целом домену.  $\square$

Геодезијске криве површи  $\mathcal{M}$  које полазе из тачке  $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$  називамо **радијалне геодезијске криве** површи  $\mathcal{M}$ . Тангентни простор  $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$  површи  $\mathcal{M}$  можемо разматрати као, такође, површ изометричну равни. Тада је геодезијска крива површи  $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$  која полази из тачке  $\mathbf{0} \in T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$  радијална геодезијска крива. Такође, тангентни вектор површи  $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$  у тачки  $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$  (која је и сама вектор) називамо **радијални тангентни вектор**, уколико је  $\mathbf{v}$  тангентни вектор радијалне геодезијске криве. Слично, за тангентни вектор површи  $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$  у тачки  $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$  кажемо да је **коррадијални тангентни вектор**, уколико је он ортогоналан на радијалне тангентне векторе у тачки  $\mathbf{v}$ .

Радијалне геодезијске криве површи  $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$  експоненцијалним пресликавањем  $\exp_{\mathbf{p}}$  пресликавају се у радијалне геодезијске криве површи  $\mathcal{M}$ , чија је једна крајња тачка  $\mathbf{p}$ .

**Лема 2.16 (Гаусова лема)** Нека је  $\mathbf{p}$  тачка површи  $\mathcal{M}$ . Тада важи

- (а) при експоненцијалном пресликавању не мења се дужина радијалних геодезијских кривих;
- (б) експоненцијално пресликавање чува ортогоналност између радијалних и коррадијалних тангентних вектора.

**Доказ:** Нека је  $\mathbf{y}$  геодезијска поларна елементарна површ (у тачки  $\mathbf{p}$  површи  $\mathcal{M}$ ). Тада су композицијом  $\mathbf{y} \circ \exp_{\mathbf{p}}$  дате уобичајене поларне координате. Ако су  $E$ ,  $F$  и  $G$  коефицијенти прве фундаменталне форме елементарне површи  $\mathbf{y}$ , тада је тврђење (а) преформулација чињенице да важи  $E = 1$ , док је тврђење (б) преформулација чињенице да важи  $F = 0$  из леме 2.15.  $\square$

## 2.5 Геодезијске криве и унутрашње растојање

**Дефиниција 2.16** Нека је  $\alpha : (a, b) \mapsto \mathcal{M}$  део по део диференцијабилна крива површи  $\mathcal{M}$  и нека су  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{M}$  њене крајње тачке. Кажемо да крива  $\alpha$  **минимизује растојање** између тачака  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$ , уколико су испуњена следећа два услова:

- (а)  $\rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = l(\alpha)$ , где је  $\rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  унутрашње растојање (види дефиницију 1.2) између тачака  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$ , а  $l(\alpha)$  дужина криве  $\alpha$ ;
- (б) свака друга део по део диференцијабилна крива, чије су крајње тачке  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$ , представља репараметризацију криве  $\alpha$ .

**Теорема 2.8** За сваку тачку  $\mathbf{q}$  нормалне околине  $N_{\mathbf{p}}$ , тачке  $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ , радијална геодезијска крива која спаја тачке  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  је једина крива која минимизује растојање између тих тачака.

**Доказ:** Нека је  $\mathbf{y}$  геодезијска поларна елементаран површ која покрива скуп  $N_{\mathbf{p}}$ . Означимо:  $\mathbf{q} = \mathbf{y}(u_0, v_0)$ . Радијална геодезијска крива  $\gamma : [0, u_0] \mapsto N_{\mathbf{p}}$  која спаја тачке  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  дефинисана је са

$$\gamma(u) = \mathbf{y}(u, v_0).$$

Свака друга крива  $\alpha$ , која спаја тачке  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$ , може бити репараметризована тако да јој домен буде исти сегмент  $[0, u_0]$ . Треба показати да важи

$$l(\gamma) \leq l(\alpha). \quad (2.17)$$

Можемо претпоставити да крива  $\alpha$  нема самопресек. Размотримо прво случај када се крива  $\alpha$  налази унутар скупа  $N_{\mathbf{p}}$ . Пошто крива  $\alpha$  нема самопресек, постоје диференцијабилне функције  $a_1, a_2 : [0, u_0] \mapsto \mathbf{R}$ , такве да важи

$$\alpha(t) = \mathbf{y}(a_1(t), a_2(t)).$$

С обзиром да важи  $\alpha(0) = \mathbf{p}$  и  $\alpha(u_0) = \mathbf{q}$ , можемо писати:

$$a_1(0) = 0, \quad a_1(u_0) = u_0, \quad a_2(0) = v_0 \quad \text{и} \quad a_2(u_0) = v_0 + 2n\pi, \quad (2.18)$$

за неки цео број  $n$ . За Кристофелове симболе елементарне површи  $\mathbf{y}$  важи  $E = 1$  и  $F = 0$ , па брзина криве  $\alpha$  задовољава

$$\|\alpha'\| = \sqrt{a_1'^2 + Ga_2'^2} \geq |a_1'| \geq a_1'.$$

Користећи једнакости (2.18), добијамо

$$l(\alpha) = \int_0^{u_0} \sqrt{a_1'^2 + Ga_2'^2} dt \geq \int_0^{u_0} a_1' dt = a_1(u_0) - a_1(0) = u_0. \quad (2.19)$$

Радијална геодезијска крива  $\gamma$  је брзине један, одакле следи

$$l(\gamma) = \int_0^{u_0} dt = u_0.$$

Користећи претходну једнакост и неједнакост (2.19), добијамо неједнакост (2.17).

С друге стране, ако крива  $\alpha$  не припада у целости скупу  $N_{\mathbf{p}}$ , онда она мора пресецати круг  $v \mapsto \mathbf{y}(u_0, v)$ . Према претходно доказаном, део криве  $\alpha$  који се налази унутар круга је дужине веће од  $l(\gamma)$ , што значи да у овом случају чак важи строга неједнакост  $l(\gamma) < l(\alpha)$ .

Напоследку, претпоставимо да важи  $l(\gamma) = l(\alpha)$ . Крива  $\alpha$  не пресеца круг  $v \mapsto \mathbf{y}(u_0, v)$  и важи једнакост у неједнакости (2.19). Дакле, важи

$$\sqrt{a_1'^2 + Ga_2'^2} = a_1'.$$

Пошто важи  $G > 0$ , из претходне једнакости следи

$$a_2' = 0,$$

то јест важи  $a_2 \equiv v_0$ , а одатле је

$$\alpha(t) = \mathbf{y}(a_1(t), v_0),$$

што нас доводи до закључка да је крива  $\alpha$  репараметризација криве  $\gamma$ .  $\square$

**Лема 2.17** Нека су  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  тачке површи  $\mathcal{M}$ . Претпоставимо да је крива  $\alpha : [a, b] \mapsto \mathcal{M}$  најкраћа од свих кривих површи  $\mathcal{M}$ , дефинисаних на истом домену које задовољавају услове  $\alpha(a) = \mathbf{p}$  и  $\alpha(b) = \mathbf{q}$ . Тада је  $\alpha$  геодезијска крива површи  $\mathcal{M}$ .

**Доказ:** Претпоставимо да крива  $\alpha$  није геодезијска. Тада важи

$$l(\alpha) > \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}).$$

Пошто  $\alpha$  није геодезијска крива, постоји вредност  $t_0 \in [a, b]$ , таква да важи  $k_g(\alpha(t_0)) \neq 0$ . Како је геодезијска кривина криве  $\alpha$  непрекидна функција, она је различита од нуле у некој околини тачке  $t_0$ , па, без губљења на општости, можемо претпоставити да је  $t_0$  унутрашња тачка сегмента  $[a, b]$ . Постоји реалан број  $\varepsilon > 0$ , такав да рестриција криве  $\alpha$  на сегмент  $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$  није геодезијска крива површи  $\mathcal{M}$ , али припада нормалној околини тачке  $\alpha(t_0)$ . На основу претходне теореме, закључујемо да је дужина рестриције криве  $\alpha$  на сегмент  $[t_0, t_0 + \varepsilon]$  ( $l(\alpha|_{[t_0, t_0 + \varepsilon]})$ ), строго већа од вредности  $\rho(\alpha(t_0), \alpha(t_0 + \varepsilon))$ . Коришћењем неједнакости троугла добијамо

$$\begin{aligned} l(\alpha) &= l(\alpha|_{[a, t_0]}) + l(\alpha|_{[t_0, t_0 + \varepsilon]}) + l(\alpha|_{[t_0 + \varepsilon, b]}) \\ &> \rho(\mathbf{p}, \alpha(t_0)) + \rho(\alpha(t_0), \alpha(t_0 + \varepsilon)) + \rho(\alpha(t_0 + \varepsilon), \mathbf{q}) \geq \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}). \end{aligned}$$

□

## 2.6 Површ као метрички простор

**Теорема 2.9** Нека је  $\mathcal{M}$  површ простора  $\mathbf{R}^n$ . Тада је  $(\mathcal{M}, \rho)$  метрички простор, где је  $\rho$  функција унутрашњег растојања површи  $\mathcal{M}$ .

**Доказ:** Очигледно важи  $\rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \rho(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  и  $\rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \geq 0$ , за сваке две тачке  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{M}$ .

Нека је  $\varepsilon > 0$  реалан број и нека су  $\alpha[a, b] \mapsto \mathcal{M}$  и  $\beta[b, c] \mapsto \mathcal{M}$  део по део диференцијабилне криве површи  $\mathcal{M}$ , такве да важи  $\alpha(a) = \mathbf{p}$ ,  $\alpha(b) = \beta(b) = \mathbf{q}$  и  $\beta(c) = \mathbf{r}$ . Нека за дужине кривих  $\alpha$  и  $\beta$  важи

$$l(\alpha) < \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad l(\beta) < \rho(\mathbf{q}, \mathbf{r}) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Дефинишимо криву  $\gamma : [a, c] \mapsto \mathcal{M}$ , на следећи начин

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(t), & t \in [a, b], \\ \beta(t), & t \in [b, c]. \end{cases}$$

Тада важи

$$\rho(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \leq l(\gamma) = l(\alpha) + l(\beta) < \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \rho(\mathbf{q}, \mathbf{r}) + \varepsilon.$$

Пошто горња неједнакост важи за произвољно  $\varepsilon$ , овим је доказана неједнакост троугла.

Да бисмо комплетирали доказ треба још да докажемо да важи

$$\rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0 \iff \mathbf{p} = \mathbf{q}. \quad (2.20)$$

Претпоставимо да важи  $\rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0$ , али да су  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  различите тачке површи  $\mathcal{M}$ . Нека је  $N_{\mathbf{p}}$  нормална околина тачке  $\mathbf{p}$ . Тада постоји реалан број  $\varepsilon > 0$ , такав да важи

$$\{\mathbf{r} \in N_{\mathbf{p}} \mid \rho(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \leq \varepsilon\} \subseteq N_{\mathbf{p}}.$$

Према дефиницији унутрашњег растојања  $\rho$ , постоји део по део диференцијабилна крива  $\alpha : [a, b] \mapsto \mathcal{M}$  за коју важи  $\alpha(a) = \mathbf{p}$  и  $\alpha(b) = \mathbf{q}$ , таква да је њена дужина мања од  $\varepsilon$ . Но, како је  $\alpha([a, b])$  повезан скуп, постоји тачка  $t_0 \in (a, b)$ , таква да важи  $\rho(\mathbf{p}, \alpha(t_0)) = \varepsilon$ . Тада, на основу теореме 2.8, следи  $l(\alpha) \geq \varepsilon$ . Контрадикција! Овим је доказан нетривијалан део еквиваленције (2.20), а тиме и лема.  $\square$

Доказ наредне теореме може се наћи у [5].

**Теорема 2.10 (Хопф<sup>5</sup>–Риноу<sup>6</sup>)** Нека је  $\mathcal{M}$  повезана површ простора  $\mathbf{R}^n$ . Следећи услови су еквивалентни

- (а)  $(\mathcal{M}, \rho)$  је комплетан метрички простор;
- (б) површ  $\mathcal{M}$  је геодезијски комплетна;
- (в) за сваку тачку  $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ , експоненцијално пресликавање  $\exp_{\mathbf{p}}$  је дефинисано на целом тангентном простору  $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$ .

Штавише, уколико је испуњена нека од претходних ставки, онда за сваке две тачке  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{M}$ , постоји геодезијска крива  $\gamma : [a, b] \mapsto \mathcal{M}$  која задовољава услове  $\gamma(a) = \mathbf{p}$  и  $\gamma(b) = \mathbf{q}$  и за коју важи

$$\rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = l(\gamma).$$

<sup>5</sup>Heinz Hopf (1894–1971), швајцарски математичар.

<sup>6</sup>Willi Rinow (1907–1978), немачки математичар.





# Глава 3

## Методе Рунге–Кута

---

Систем геодезијских једначина (2.8), у општем случају, решава се применом неке нумеричке методе. Тиме се посебно бавимо у оквиру главе 5, када користимо, такозване, **методе Рунге<sup>1</sup>–Кута<sup>2</sup>**. Стога, овде дајемо кратак преглед тих метода.

С обзиром на то да се свака диференцијална једначина  $m$ -тог реда

$$u^{(m)}(x) = f(x, u, u', \dots, u^{(m-1)}),$$

сменом  $u_k(x) = u^{(k)}(x)$  своди на систем од  $m$  диференцијалних једначина првог реда

$$\begin{aligned} u'_k(x) &= u_{k+1}(x), \quad k = 0, \dots, m-2, \\ u'_{m-1} &= f(x, u_0, \dots, u_{m-1}), \end{aligned}$$

довољно је ограничити се на решавање система једначина првог реда

$$u'_k(x) = f_k(x, u_1, \dots, u_m), \quad k = 1, \dots, m,$$

који можемо записати у векторском облику

$$\mathbf{u}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{u}(x)), \tag{3.1}$$

где је  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)^T$  и  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)^T$ . Задавањем  $m$  услова које решење треба да задовољава, из општег решења система диференцијалних једначина (3.1) одређујемо, такозвано, партикуларно решење. Уколико су сви услови задати у једној тачки  $x_0$ , тада је системом (3.1), допуњеним овим условима, дефинисан проблем који називамо **почетни** или **Кошијев<sup>3</sup> проблем**. Почетне услове  $u_k(x_0) = u_{0,k}$ ,  $k = 1, \dots, m$ , такође, записујемо у векторском облику

$$\mathbf{u}(x_0) = \mathbf{u}_0, \tag{3.2}$$

где је  $\mathbf{u}_0 = (u_{0,1}, \dots, u_{0,m})$ .

Код метода Рунге–Кута се, на основу познате вредности решења Кошијевог проблема у тачки  $x$ , одређује вредност решења у тачки  $x + h$ . Ради једноставности, илуструјмо их у

<sup>1</sup>Carle David Tolme Runge (1856–1927), немачки математичар.

<sup>2</sup>Martin Wilhelm Kutta (1867–1944), немачки математичар.

<sup>3</sup>Augustin Louis Cauchy (1789–1857), француски математичар.

случају једне диференцијалне једначине првог реда. Дакле, у Кошијевом проблему (3.1), (3.2), важи  $m = 1$ . Интегралимо ли једначину (3.1) у границама од  $x$  до  $x + h$ , добијамо вредност функције  $u$  у тачки  $x + h$ :

$$u(x + h) = u(x) + \int_x^{x+h} f(t, u(t)) dt. \quad (3.3)$$

Заменом интеграла на десној страни горње једнакости квадратурном формулом, добијамо

$$u(x + h) \approx u(x) + h \sum_{i=1}^n c_i f(x_i, u(x_i)), \quad (3.4)$$

где су  $c_i$  коефицијенти, а  $x_i \in (x, x + h)$  чворови квадратурне формуле. Приметимо да се резултујућа функција  $u$  јавља као аргумент функције  $f$ , па у формули (3.4) фигуришу вредности  $u(x_i)$  које нису познате. Ако те вредности сукцесивно апроксимирамо, користећи већ одређене апроксимације решења у претходним чворовима, израз (3.4) можемо записати у следећем облику:

$$u(x + h) \approx v(x + h) = u(x) + \sum_{i=1}^n c_i k_i(h), \quad (3.5)$$

где је за  $u = u(x)$  и  $x_i = x + \alpha_i h$ ,  $0 = \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n \leq 1$ :

$$\begin{aligned} k_1(h) &= hf(x, u), \\ k_2(h) &= hf(x + \alpha_2 h, u + \beta_{2,1} k_1(h)), \\ &\vdots \\ k_n(h) &= hf(x + \alpha_n h, u + \beta_{n,1} k_1(h) + \dots + \beta_{n,n-1} k_{n-1}(h)). \end{aligned}$$

Различитим избором параметара  $\alpha_2, \dots, \alpha_n, c_1, \dots, c_n$  и  $\beta_{i,j}$ ,  $0 < j < i \leq n$ , формулом (3.5) су дефинисане различите методе типа Рунге–Кута.

Нека је грешка методе на једном кораку

$$\varepsilon(h) = u(x + h) - v(x + h). \quad (3.6)$$

Уколико је  $f$  довољно глатка функција својих аргумената, тада су  $k_1, \dots, k_n$  и  $\varepsilon$  глатке функције корака  $h$ . Претпоставимо да важи

$$\varepsilon(0) = \varepsilon'(0) = \dots = \varepsilon^{(p)}(0) = 0, \quad \varepsilon^{(p+1)}(0) \neq 0,$$

за произвољну функцију  $f$ .

На основу Тејлорове<sup>4</sup> формуле, грешка методе на једном кораку је

$$\varepsilon(h) = \sum_{i=0}^p \frac{\varepsilon^{(i)}(0)}{i!} h^i + \frac{\varepsilon^{(p+1)}(\theta h)}{(p+1)!} h^{p+1}, \quad 0 < \theta < 1. \quad (3.7)$$

(Иначе, број  $p$  називамо **ред грешке** методе).

Анализирајмо неке од могућих избора параметара формуле (3.5) и грешке одговарајућих метода.

<sup>4</sup>Brook Taylor (1685–1731), енглески математичар.

- $n = 1$  На основу (3.5) и (3.6), добијамо

$$\varepsilon(h) = u(x+h) - u(x) - c_1 h f(x, u).$$

Одатле је

$$\varepsilon'(h) = u'(x+h) - c_1 f(x, u), \quad \varepsilon''(h) = u''(x+h).$$

Пошто је  $\varepsilon(0) = 0$  и  $\varepsilon'(0) = (1 - c_1)f(x, u) = 0$ , за  $c_1 = 1$  и за сваку функцију  $f$ , на основу формуле (3.7), добијамо

$$u(x+h) = u(x) + h f(x, u) + \frac{u''(x+\theta h)}{2} h^2.$$

Дакле, формула Рунге–Куга за  $n = 1$  је дата са

$$v(x+h) = u(x) + h f(x, u(x))$$

(њу још називамо и **Ојлерова**<sup>5</sup> **формула**).

- $n = 2$  У овом случају је грешка методе

$$\varepsilon(h) = u(x+h) - u(x) - c_1 h f(x, u) - c_2 h f(\bar{x}, \bar{u}),$$

где је  $\bar{x} = x + \alpha_2 h$  и  $\bar{u} = u + \beta_{2,1} h f$ . Диференцирањем претходне једнакости по  $h$  добијамо

$$\begin{aligned} \varepsilon'(h) &= u'(x+h) - c_1 f(x, u) - c_2 f(\bar{x}, \bar{u}) - c_2 h (\alpha_2 f_x(\bar{x}, \bar{u}) + \beta_{2,1} f_u(\bar{x}, \bar{u}) f(x, u)), \\ \varepsilon''(h) &= u''(x+h) - 2c_2 (\alpha_2 f_x(\bar{x}, \bar{u}) + \beta_{2,1} f_u(\bar{x}, \bar{u}) f(x, u)) \\ &\quad - c_2 h (\alpha_2^2 f_{xx}(\bar{x}, \bar{u}) + 2\alpha_2 \beta_{2,1} f_{xu}(\bar{x}, \bar{u}) f(x, u) + \beta_{2,1}^2 f_{uu}(\bar{x}, \bar{u}) f(x, u)^2), \\ \varepsilon'''(h) &= u'''(x+h) - 3c_2 (\alpha_2^2 f_{xx}(\bar{x}, \bar{u}) + 2\alpha_2 \beta_{2,1} f_{xu}(\bar{x}, \bar{u}) f(x, u) \\ &\quad + \beta_{2,1}^2 f_{uu}(\bar{x}, \bar{u}) f(x, u)^2) + O(h). \end{aligned}$$

Пошто из диференцијалне једначине (3.1) следи

$$u' = f, \quad u'' = f_x + f_u f, \quad u''' = f_{xx} + 2f_{xu} f + f_{uu} f^2 + f_u (f_x + f_u f),$$

закључујемо да важи:

$$\begin{aligned} \varepsilon(0) &= 0, \\ \varepsilon(0) &= (1 - c_1 - c_2) f(x, u), \\ \varepsilon''(0) &= (1 - 2c_2 \alpha_2) f_x(x, u) + (1 - 2c_2 \beta_{2,1}) f_u(x, u) f(x, u), \\ \varepsilon'''(0) &= (1 - 3c_2 \alpha_2^2) f_{xx}(x, u) + (2 - 6c_2 \alpha_2 \beta_{2,1}) f_{xu}(x, u) f(x, u) \\ &\quad + (1 - 3c_2 \beta_{2,1}^2) f_{uu}(x, u) f(x, u)^2 + f_u(x, u) u''(x). \end{aligned}$$

Дакле, за сваку (довољно глатку) функцију  $f$  важи

$$\varepsilon'(0) = 0, \quad \text{ако важи} \quad 1 - c_1 - c_2 = 0, \tag{3.8}$$

<sup>5</sup>Leonhard Euler (1707–1783), швајцарски математичар.

$$\varepsilon''(0) = 0, \quad \text{ако важи} \quad 1 - c_2\alpha_2 = 0 \quad \text{и} \quad 1 - 2c_2\beta_{2,1}, \quad (3.9)$$

те, на основу (3.7), за  $p = 2$  добијамо

$$u(x+h) = u(x) + c_1hf(x, u) + c_2h^2f(x + \alpha_2h, u + \beta_{2,1}hf(x, u)) + \frac{\varepsilon'''(\theta h)}{6}h^3. \quad (3.10)$$

Услови (3.8) и (3.9) дају три везе између четири параметра, па један од њих можемо изабрати произвољно. Уколико изаберемо  $c_1 = \frac{1}{2}$ , добијамо  $c_2 = \frac{1}{2}$ ,  $\alpha_2 = 1$  и  $\beta_{2,1} = 1$ , те занемаривањем грешке у формули (3.10), добијамо формулу Рунге–Кута за  $n = 2$ :

$$v(x+h) = u(x) + \frac{h}{2}[f(x, u(x)) + f(x+h, u(x) + hf(x, u(x)))], \quad (3.11)$$

чија је грешка реда  $O(h^3)$ .

Слично, за  $c_1 = 0$ , добијамо  $c_2 = 1$ ,  $\alpha_2 = \frac{1}{2}$  и  $\beta_{2,1} = \frac{1}{2}$ , што имплицира формулу

$$v(x+h) = u(x) + hf(x + \frac{h}{2}, u(x) + \frac{h}{2}f(x, u(x))), \quad (3.12)$$

која је исте тачности као и претходна. Формулом (3.11) је приближно решење Кошијевог проблема одређено апроксимацијом интеграла у изразу (3.3) трапезном квадратурном формулом, а формулом (3.12) правилом правоугаоника. Приметимо још да се слободан параметар не може изабрати тако да за сваку функцију  $f$  важи  $\varepsilon'''(0) = 0$ , то јест да је грешка на једном кораку реда  $O(h^4)$ .

- $n = 3$  Сличном анализом као у претходним случајевима добијамо услове које непознати параметри морају задовољавати:

$$\alpha_2 = \beta_{2,1}, \quad \alpha_3 = \beta_{3,1} + \beta_{3,2}, \quad \alpha_3(\alpha_3 - \alpha_2) - \beta_{3,2}\alpha_2(2 - 3\alpha_2) = 0,$$

$$c_3\beta_{3,3}\alpha_2 = \frac{1}{6}, \quad c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 = \frac{1}{2}, \quad c_1 + c_2 + c_3 = 1.$$

Пошто за осам непознатих параметара имамо шест веза, два од њих можемо одабрати произвољно. Најчешће коришћена формула (која је тачности  $O(h^4)$  на једном кораку) је

$$\begin{aligned} k_1(h) &= hf(x, u), \\ k_2(h) &= hf(x + \frac{h}{2}, u + \frac{k_1}{2}), \\ k_3(h) &= hf(x + h, u - k_1 + 2k_2), \\ v(x+h) &= u(x) + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3). \end{aligned}$$

- $n = 4$  У овом случају могуће је извести формулу највише реда четири (то јест са грешком  $O(h^5)$  на једном кораку). Најчешће коришћена таква формула је:

$$\begin{aligned}k_1(h) &= hf(x, u), \\k_2(h) &= hf\left(x + \frac{h}{2}, u + \frac{k_1}{2}\right), \\k_3(h) &= hf\left(x + \frac{h}{2}, u + \frac{k_2}{2}\right), \\k_4(h) &= hf(x + h, u + k_3), \\v(x + h) &= u(x) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).\end{aligned}$$

**Напомена 3.1** Често се под термином "метода Рунге–Кута" (без навођења вредности параметра  $n$ ), подразумевају последње написане формуле.

У случају система диференцијалних једначина, формуле Рунге–Кута остају исте, с тим што су тада  $u, v, f$  и  $k_i, i = 1, \dots, n$  векторске величине.



# Глава 4

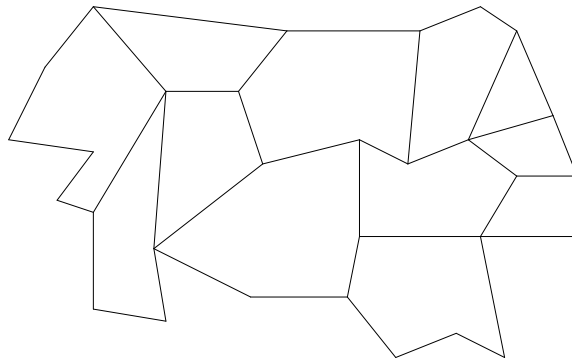
## Геодезијски полиедри и мреже

---

Ово је прва од две главе посвећене оригиналним резултатима. Они су засновани на резултатима постигнутим у оквиру дискретне геометрије са којима се преплићу у прва два поглавља. Треће, четврто и пето поглавље посвећени су проблему генерисања дискретних површи геодезијским кривим, одређивању њихових особина и начина за њихово добијање.

### 4.1 Основне дефиниције

**Дефиниција 4.1** Граф је уређена тројка  $G = (V(G), E(G), \psi_G)$  која се састоји од непразног скупа  $V = V(G)$ , чији су елементи **врхови (темена, чворови)** графа  $G$ , скупа  $E = E(G)$ , чији су елементи **ране (линије)** графа  $G$  и **функције инциденције**  $\psi_G$ , која свакој грани придружује неуређени пар (необавезно различитих) врхова. Ако је  $e \in E(G)$  и  $u, v \in V(G)$  тако да важи  $\psi_G(e) = uv$ , кажемо да **рана  $e$  спаја врхове  $u$  и  $v$**  и да су врхови  $u$  и  $v$  **крајеви** **ране  $e$** . Крајеви неке **ране** су **инцидентни** са њом и називамо их **суседним врховима**. Слично, **ране** које имају један заједнички врх су такође **суседне**. Уобичајене ознаке су:  $\nu = \nu(G)$  – број врхова графа  $G$ ,  $\varepsilon = \varepsilon(G)$  – број **рана** графа  $G$ .



## Слика 4.1 Поли-граф.

За будућа разматрања је посебно интересантна класа раванских графова које ћемо звати **поли-графови**. То су графови чије ивице ограничавају највише пребројив скуп простих полигона (види слику 4.1).

**Дефиниција 4.2** Дискретна мрежа простора  $\mathbf{R}^3$  је пресликавање  $F : G \mapsto \mathbf{R}^3$ , где је  $G$  неки поли-граф.

Слике врхова и грана поли-графа  $G$  при пресликавању  $F$ , зваћемо редом **темена** и **ивице** дискретне мреже.

Сваки равански граф дели раван којој припада на одређени број отворених области (које називамо **стране** графа) од којих је тачно једна неограничена. Ту страну називамо **спољашња страна**. Гране и врхови графа који припадају рубу спољашње стране су редом **спољашње гране** и **спољашњи врхови** графа, док су остале гране и врхови **унутрашњи**. За теме дискретне мреже кажемо да је унутрашње ако је оно слика унутрашњег врха одговарајућег графа и слично у осталим случајевима.

Интуитивно, поли-граф, такође, можемо схватити као једну мрежу у равни, док је дискретна мрежа нешто што се добија када се тај граф деформише у простору. Приметимо да том приликом могу настати различити случајеви као на пример: слика руба стране графа се не мора налазити у једној равни, могућа су самопресецања ивица мреже, слика руба једне стране графа може се (делом) покlopити са сликом руба неке друге стране и слично. Како бисмо избегли те аномалије, дефинисаћемо специјалне дискретне површи-полиедре.

**Дефиниција 4.3** Полиедар  $\mathcal{P}$  је (повезана) површи простора  $\mathbf{R}^3$  коју чини највише пребројив скуп  $F$  раванских троуглова које ћемо звати **стране** полиедра, таква да важи

- (а) свака тачка  $p \in \mathcal{P}$  припада унутрашњости тачно једног троугла  $f \in F$ ;
- (б) свака тачка  $p \in \mathcal{P}$  има околину која пресеца коначно много троуглова  $f \in F$ ;
- (в) пресек два различита троугла  $f, g \in F$  је или празан или се састоји од једног заједничког темена или једне заједничке стране.
- (г) ивица неког троугла је инцидентна са још највише једним троуглом.

Јасно је да су темена и ивице страна полиедра, уједно темена и ивице самог полиедра.

**Напомена 4.1** Приметимо да горња дефиниција обухвата и неке дискретне површи чије стране нису троуглови. На пример, коцка је полиедар, јер се свака њена страна може дијагоналном поделити на два троугла. Стога ће, надаље, свака два троугла која припадају истој равни и имају једну заједничку ивицу чинити једну страну полиедра.

**Дефиниција 4.4** За полиедар кажемо да је **ограничен**, уколико постоји кугла  $B(\mathbf{0}, r) \subset \mathbf{R}^3$  која га садржи.

**Дефиниција 4.5** Затворен полиедар је онај чија је свака ивица инцидентна са двема странама. Граница полиедра је скуп свих ивица инцидентних са једном страном. Темена полиедра која припадају његовој граници зовемо **гранична темена**, док су сва остала темена **унутрашња**.

**Дефиниција 4.6** Валенција (степен) темена дискретне мреже или полиедра је број ивица инцидентних са тим теменом. Уколико су сва унутрашња темена исте валенције  $k$ , за дискретну мрежу (полиедар) кажемо да је  $k$ -валентна.

Убудуће ћемо подразумевати да је на свакој страни полиедра дефинисана еуклидска метрика.



**Дефиниција 4.7** Нека је  $\alpha : (a, b) \mapsto \mathcal{P}$  крива која је ректифабилна на свакој страни полиедра. Тада је дужина криве  $\alpha$  дата са

$$l(\alpha) = \sum_{\mathbf{f} \in \mathbf{F}} l(\alpha|_{\mathbf{f}}).$$

**Дефиниција 4.8** Нека је  $\mathbf{v} \in \mathcal{P}$ , теме полиедра  $\mathcal{P}$  и нека је  $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n\}$ , скуп свих страна инцидентних са теменом  $\mathbf{v}$ . Тада тај скуп означавамо са  $z(\mathbf{v})$  и зовемо **звезда темена  $\mathbf{v}$** . Слично, скуп свих страна инцидентних са ивицом  $\mathbf{vw}$ , полиедра  $\mathcal{P}$  (а таквих је највише две), означавамо са  $z(\mathbf{vw})$  и зовемо **звезда стране  $\mathbf{vw}$** .

**Дефиниција 4.9** Површина полиедра  $\mathcal{P}$  дата је са

$$P(\mathcal{P}) = \sum_{\mathbf{f}_i \in \mathbf{F}} P(\mathbf{f}_i),$$

где је  $\mathbf{F}$  скуп његових страна.

Сваки затворени ограничени полиедар дели простор  $\mathbf{R}^3$  на две отворене области од којих је једна неограничена и њу ћемо звати **спољашњост**, а друга ограничена (**унутрашњост**). Даље, сваки затворни полиедар можемо транслирати тако да координатни почетак припада његовој унутрашњости. У том случају, није тешко показати да следећа дефиниција не зависи од положаја координатног почетка у унутрашњости полиедра.

**Дефиниција 4.10** Запремина оријентисаног затвореног полиедра  $\mathcal{P}$  дата је са

$$V(\mathcal{P}) = \frac{1}{6} \sum_{\mathbf{f}_i(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathcal{P}} [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}].$$

где је  $\mathbf{f}_i(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$  страна са теменима  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{w}$ .

Очигледно је запремина полиедра једнака суми запремина конуса над његовим странама.

**Дефиниција 4.11** Тотални угао темена  $\mathbf{v}$ , полиедра  $\mathcal{P}$ , дат је са

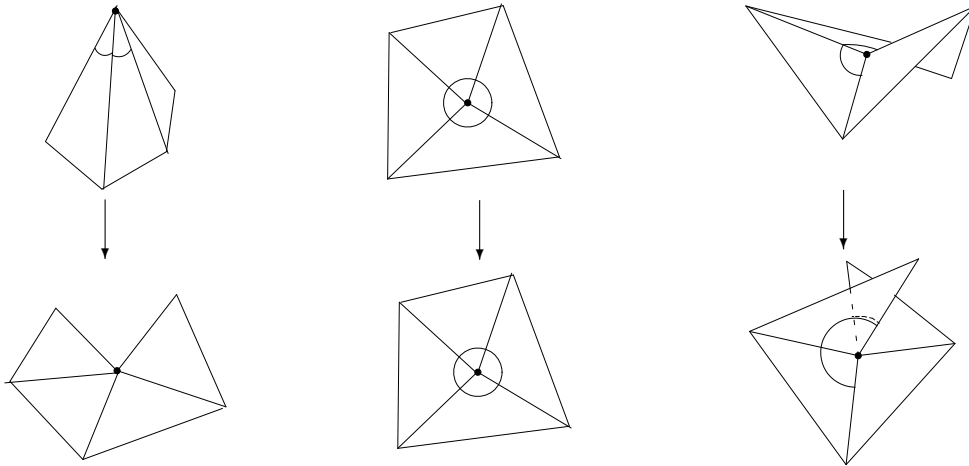
$$\theta(\mathbf{v}) = \sum_{\mathbf{f}_i \in z(\mathbf{v})} \theta_{\mathbf{f}_i}(\mathbf{v}),$$

где је  $\theta_{\mathbf{f}_i}(\mathbf{v})$  унутрашњи угао код темена  $\mathbf{v}$  стране  $\mathbf{f}_i$ .

Унутрашња тачка  $\mathbf{p}$  стране полиедра, као и тачка из унутрашњости његове ивице, имају околину изометричну равни, па у тим случајевима дефинишемо  $\theta(\mathbf{p}) = 2\pi$ .

Све тачке полиедра могу бити класификоване према томе на који начин њихов тотални угао одступа од пуног угла.

**Дефиниција 4.12** За тачку  $\mathbf{p}$  полиедра  $\mathcal{P}$  кажемо да је **елиптичка**, **параболичка**, односно **хиперболичка**, према томе да ли је вредност  $2\pi - \theta(\mathbf{p})$ , мања, једнака, односно већа од нуле.



Слика 4.2 Елиптичко, параболичко и хиперболичко теме полиедра.

Очигледно су све тачке полиедра, различите од темена, параболичке. Околина темена је изометрична са (једноструким или вишеструким) покривањем дела равни, као што је то приказано на слици 4.2, у случају три типа темена.

Околина сваке тачке полиедра, различите од темена, изометрична је делу равни, па је зато Гаусова кривина у таквој тачки једнака нули, док Гаусову кривину сваког темена затвореног полиедра дефинишемо на следећи начин:

**Дефиниција 4.13** Гаусова кривина у темену  $\mathbf{v}$ , затвореног полиедра  $\mathcal{P}$ , дата је са

$$K(\mathbf{v}) = 2\pi - \theta(\mathbf{v}) \quad (4.1)$$

$$= 2\pi - \sum_{\mathbf{f}_i \in z(\mathbf{v})} \theta_{\mathbf{f}_i}(\mathbf{v}). \quad (4.2)$$

**Тотална Гаусова кривина**  $K(\mathcal{P})$  полиедра  $\mathcal{P}$  једнака је суми Гаусових кривина у свим његовим теменима.

Непосредна последица претходне дефиниције је да је Гаусова кривина у елиптичким теменима позитивна, у параболичким једнака нули, а у хиперболичким негативна.

**Напомена 4.2** Дефиниција 4.13 важи и за свако унутрашње теме произвољног полиедра. Постоје различите дефиниције Гаусове кривине у граничним теменима полиедра: аутори у [14] и [15] дефинишу  $K(\mathbf{v}) = \pi - \theta(\mathbf{v})$ , ако је  $\mathbf{v}$  гранично теме; док у [1], аутори Гаусовом кривином граничног темена називају разлику између тоталних углова тог темена, уколико је посматрани полиедар део неког већег полиедра. Ми се, овде, на томе нећемо дуже задржавати.

## 4.2 Дискретне геодезијске криве

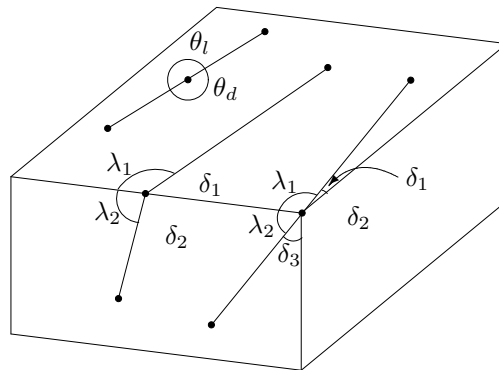
Геодезијске криве глатких површи карактеришу два својства: оне су локално најкраће (лема 2.17) и „најправије” (у неком смислу најмање одступају од праве линије) криве. Геодезијске криве дискретних површи се битно разликују у том погледу, јер оне, у општем случају, не могу поседовати обе горе наведене особине.

Геодезијске криве графова, полиедара и општијих дискретних површи су изучавали многи математичари (види [1], [13], [14], [15]).

У неким радовима геодезијска крива дискретне површи дефинисана је као локално најкраћа крива (то јест крива која, локално посматрано, представља најкраће растојање између две тачке које јој припадају). Но, тај приступ има један крупан недостатак: локално најкраћу криву немогуће је продужити преко елиптичког темена и немогуће јединствено продужити преко хиперболичког темена полиедра. Наиме, нека је  $v$  елиптичко теме полиедра  $\mathcal{P}$  и нека најкраћа геодезијска крива полази из тачке  $p \in f \in z(v)$ , пролази кроз тачку  $v$  и затим продужава до неке тачке  $q$ . Тада се доказује да за сваку тачку  $q \in \mathcal{P}$ , постоји краћа крива која припада полиедру  $\mathcal{P}$  и спаја тачке  $p$  и  $q$ . Слично, постоји бесконачно много продужења најкраће геодезијске криве преко хиперболичког темена полиедра, тако да су сва она коректна у смислу да представљају најкраће унутрашње растојање између почетне и крајње тачке криве.

У раду [13], разматрају се, такозване, квазигеодезијске криве које су локално најкраће и јединствено продуживе преко хиперболичких, али и даље непродуживе преко елиптичких темена полиедра. Ми ћемо се, од два својства геодезијских кривих глатких површи, одредити за својство „најправије” криве и као такве дефинисати дискретне геодезијске криве.

**Дефиниција 4.14** Нека је  $\mathcal{P}$  полиедар и  $\gamma : (a, b) \mapsto \mathcal{P}$  крива. Тада је  $\gamma$  **најправија геодезијска крива** полиедра  $\mathcal{P}$ , уколико су за сваку тачку  $p \in \gamma(a, b)$  леви и десни угао криве  $\gamma$ , у тачки  $p$ , међусобно једнаки (слика 4.3).



**Слика 4.3** Леви  $\theta_l = \sum \lambda_i$  и десни  $\theta_d = \sum \delta_j$  угао криве. Уколико у свакој тачки криве важи  $\theta_l = \theta_d$ , онда је крива геодезијска.

**Теорема 4.1** Ако је  $v_p$  полиедрални тангентни вектор у тачки  $p \in \mathcal{P}$ , онда постоји јединствена најправија геодезијска крива  $\gamma$ , за коју важи

$$\begin{cases} \gamma(0) = p, \\ \gamma'(0) = v_p. \end{cases} \quad (4.3)$$

Таква геодезијска крива може се продужити до границе полиедра.

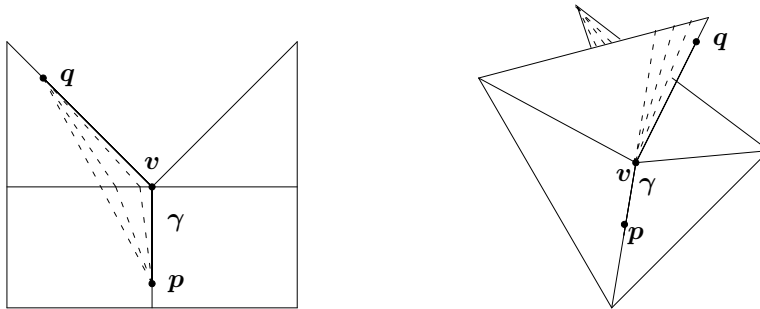
**Доказ:** Нека је  $f$  страна полиедра  $\mathcal{P}$  која садржи тачку  $p$  и за довољно мали реалан број  $\varepsilon > 0$ , дуж  $\gamma(t) = p + tv$ ,  $t \in [0, \varepsilon)$ . Крива  $\gamma$  је најправија геодезијска крива и решење Кошијевог проблема (4.3). Криву  $\gamma$  можемо, на јединствен начин, продужити преко ивице или темена полиедра  $\mathcal{P}$ , у складу са дефиницијом 4.14, чиме је теорема доказана.  $\square$

**Лема 4.1** Нека је  $\mathcal{P}$  полиедар, тада важи:

- (а) геодезијска крива је истовремено најправија и најкраћа ако не садржи теме полиедра;
- (б) локално најкраћа геодезијска крива која садржи елиптичко теме није и глобално најкраћа;
- (в) постоји фамилија најкраћих геодезијских кривих  $\gamma_\theta$ , које садрже хиперболичко теме полиедра и које представљају решење Кошијевог проблема (4.3). Тачно једна од њих је и најправија.

**Доказ:** (а) Две стране, инцидентне са истом ивицом полиедра, изоморфне су делу равни (то јест једна од њих може се заротирати око заједничке ивице тако да се преслика у равни друге). Тада је јасно да геодезијска крива која припада тим странама, након изведене ротације постаје дуж одакле следи да је она најправија (у смислу дефиниције) и најкраћа (то јест представља најкраће растојање између својих крајњих тачака).

(б) Нека је  $\gamma$  најкраћа геодезијска крива која садржи елиптичко теме  $v$  и спаја тачке  $p$  и  $q$ , суседних страна полиедра  $\mathcal{P}$  (слика 4.4 (а)). Тада је конвексан угао криве  $\gamma$  у тачки  $v$  једнак  $\frac{\theta}{2} = \pi - \frac{K(v)}{2} < \pi$  и уколико једну од две суседне стране заротирамо око заједничке ивице тако да се преслика у равни друге, закључујемо да постоји крива краћа од  $\gamma$ , која спаја тачке  $p$  и  $q$ .



**Слика 4.4 (а)** Локално најкраћа крива није и глобално најкраћа у случају елиптичког темена полиедра. (б) Продужења локално најкраће криве преко хиперболичког темена полиедра.

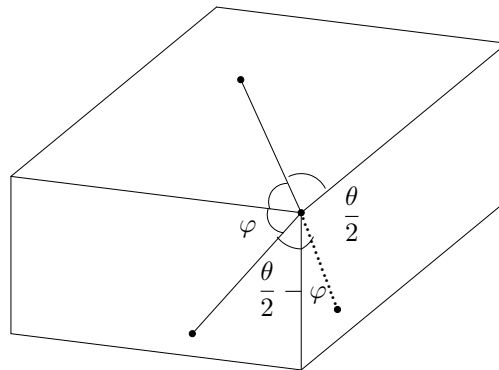
(в) Нека је  $\gamma_0$  јединствена најправија геодезијска крива која садржи хиперболичко теме и спаја тачке  $p$  и  $q$ , суседних страна  $f_1$  и  $f_2$ , полиедра  $\mathcal{P}$  (таква крива постоји, на основу теореме 4.1) (слика 4.4. (б)). Тада је угао криве  $\gamma$  у тачки  $v$  једнак  $\frac{\theta}{2} = \pi - \frac{K(v)}{2} > \pi$  и уколико поново извршимо ротацију једне од суседних страна (у овом случају оне ће се (делимично) поклопити), закључујемо да постоји бесконачно много најкраћих геодезијских кривих које се на страни  $f_1$  поклапају са  $\gamma_0$  и затим продужавају дуж стране  $f_2$ . Наиме, довољно је да задовољавају услов да је сума два угла криве код темена  $v$  већа од  $2\pi$ .  $\square$

Као и у случају Гаусове кривине, дискретна геодезијска кривина је еквивалент геодезијске кривине у случају глатких површи.

**Дефиниција 4.15** Нека је  $\alpha : (a, b) \mapsto \mathcal{P}$  полиедрална крива,  $\theta(v)$  тотални угао код темена  $v$  и  $\varphi$  један од два угла криве  $\alpha$  у тачки  $v$ . Тада је дискретна геодезијска кривина  $k_g$ , криве  $\alpha$  у тачки  $v$ , дата са

$$k_g = \frac{2\pi}{\theta} \left( \frac{\theta}{2} - \varphi \right).$$

Ако одаберемо други угао криве  $\alpha$  у тачки  $v$ ,  $\varphi' = \theta - \varphi$ , геодезијска кривина мења знак.



Слика 4.5 Геодезијска кривина полиедралне криве.

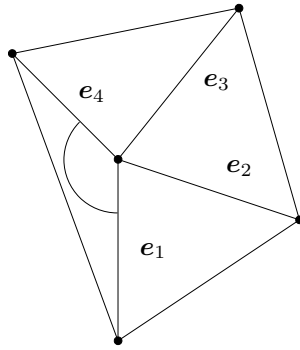
**Лема 4.2** Полиедрална крива  $\gamma : (a, b) \mapsto \mathcal{P}$  је најправија геодезијска крива ако и само ако је геодезијска кривина једнака нули у свакој тачки те криве.

### 4.3 Геодезијски полиедри

У овом поглављу, наш задатак је да дефинишемо специјалну класу полиедара, за чије свако унутрашње теме постоји геодезијска крива која садржи две ивице инцидентне са тим теменом.

Предмет нашег даљег разматрања су полиедри чије је свако унутрашње теме парне валенције.

**Дефиниција 4.16** Нека је  $v \in \mathcal{P}$  теме полиедра које је валенције  $2k$ . Тада ивице инцидентне са теменом  $v$  можемо означити са  $e_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2k$ , где су ивице  $e_i$  и  $e_{i+1}$ , за  $i = 1, 2, \dots, 2k - 1$ , и  $e_1$  и  $e_{2k}$  инцидентне са заједничком страном. Сваки такав пар ивица називамо **суседне ивице**. Ивице  $e_i$  и  $e_{k+i}$ , за  $i = 1, 2, \dots, k$ , су **супротне**. **Суседне стране** су стране које имају заједничку ивицу, док су сваке две суседне ивице и њима супротне ивице инцидентне са паром **супротних страна**. **Супротни углови** су углови код темена  $v$  супротних страна полиедра.



Слика 4.6 Ивице, углови и стране код темена  $v$  валенције четири.

**Дефиниција 4.17** Леви и десни угао између две ивице инцидентне са истим теменом  $v$  полиедра, једнаки су левом и десном углу у тачки  $v$ , криве која садржи те ивице.

На основу дефиниције 4.14, полиедрална крива је геодезијска, уколико су леви и десни угао међусобно једнаки у свакој тачки криве. То нас мотивише да уведемо следећу дефиницију.

**Дефиниција 4.18** Геодезијски или  $G$ -полиедар је полиедар код којег су леви и десни угао између сваке две супротне ивице једнаки.

Пар супротних ивица  $G$ -полиедра одређује геодезијску криву. Следећа особина даје још ближу слику о  $G$ -полиедрима.

**Особина 4.1** Супротни углови  $G$ -полиедра су међусобно једнаки.

**Доказ:** Нека су  $e_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2k$ , ивице инцидентне са произвољним унутрашњим теменом  $G$ -полиедра. Означимо углове између њих са

$$\angle(e_1, e_2) = \alpha_1, \angle(e_2, e_3) = \alpha_2, \dots, \angle(e_{2k}, e_1) = \alpha_{2k}.$$

Тада, из услова да  $e_i e_{k+i}$  за  $i = 1, 2, \dots, k$ , представља геодезијску криву, следи

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \dots + \alpha_k &= \alpha_{k+1} + \alpha_{2k}, \\ \alpha_i + \dots + \alpha_{k+i-1} &= (\alpha_1 + \dots + \alpha_{i-1}) + (\alpha_{k+i} + \dots + \alpha_{2k}), \quad i = 2, 3, \dots, k. \end{aligned}$$

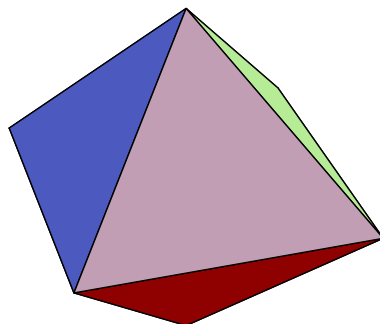
Последица горњих једнакости је  $\alpha_i = \alpha_{k+i}$  за  $i = 1, 2, \dots, k$ . □

**Особина 4.2** За свако теме валенције  $2k$ ,  $G$ -полиедра, постоји  $2k$  геодезијских кривих, које полазе из тог темена и садржи само ивице полиедра (то јест не пресецају унутрашњост ниједне стране).

**Доказ:** Нека је  $v$  унутрашње теме  $G$ -полиедра, тада је произвољна њему инцидентна ивица геодезијска крива која се може продужити тако да садржи ивицу супротну претходној и тако даље. □

Јасно је да тотални угао различитих темена  $G$ -полиедра не мора бити исти, нити да његове ивице морају бити једнаке. Ипак, неке једноставне примере таквих полиедара можемо добити наметањем неког од та два услова.

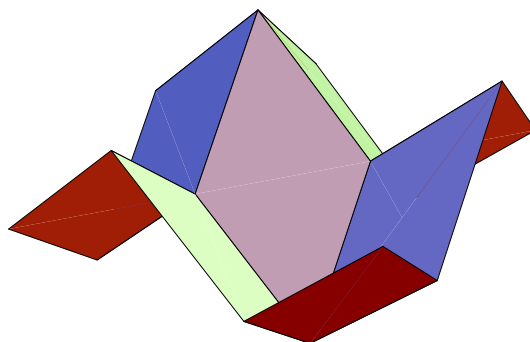
**Пример 4.1** Једноставан пример  $G$ -полиедра је октаедар. ■



Слика 4.7 Октаедар.

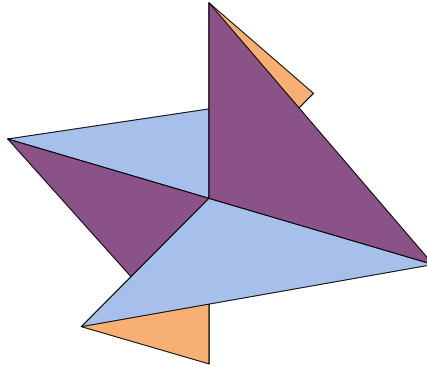
**Пример 4.2** Конструиримо 4-валентан  $G$ -полиедар чије су стране четвороуглови и чије су све ивице међусобно једнаке. Комбинација претходних услова имплицира да свака страна полиедра мора бити ромб. Једноставности ради, нека су све стране подударне ромбу чији је један угао једнак  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ . Тада су сви углови код једног унутрашњег темена једнаки  $\alpha$ , а код њему суседних унутрашњих темена  $\pi - \alpha$ . Дакле, тотални углови унутрашњих темена једнаки су  $4\alpha$ , односно  $4(\pi - \alpha)$ , па је Гаусова кривина у једном случају једнака  $K(\theta') = 2(\pi - 2\alpha)$ , а у другом  $K(\theta'') = 2(2\alpha - \pi)$ . Приметимо да је, од свака два суседна унутрашња темена, једно елиптичко, а друго хиперболичко. Уколико су скупови елиптичких и хиперболичких темена исте кардиналности  $n$ , онда је тотална Гаусова кривина једнака

$$K = n(2(\pi - 2\alpha) + 2(2\alpha - \pi)) = 0.$$



Слика 4.8 4-валентан  $G$ -полиедар.

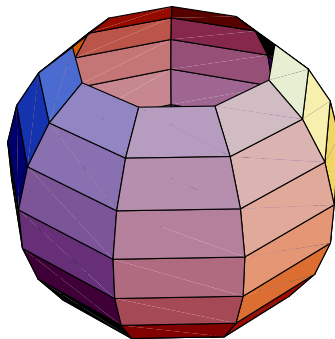
**Пример 4.3** Слика 4.9 илуструје 6-валентан  $G$ -полиедар чије су стране једнакократи правоугли троуглови. Тотални угао јединог унутрашњег темена једнак је  $3\pi$ , колика је и тотална Гаусова кривина. ■



Слика 4.9 6-валентан  $G$ -полиедар.

**Пример 4.4** Аналогно дефиницији 2.8, можемо дефинисати ротационе површи у дискретном случају.

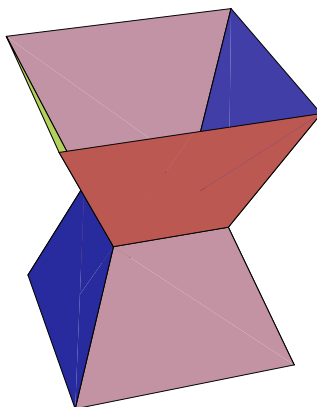
**Дефиниција 4.19** Нека је  $s$  права равни  $\sigma \in \mathbf{R}^3$  и  $S$  коначан скуп тачака равни  $\sigma$ , такав да се све тачке скупа  $S$  налазе са исте стране праве  $s$  или јој евентуално припадају. За сваку тачку  $p \in S$  уочимо затворен (може бити неправилан, али такав да се око њега може описати круг) полигон који садржи тачку  $p$ , налази се у равни ортогоналној на праву  $s$  и чији центар описаног круга припада правој  $s$ . И нека су сви полигони, придружени тачкама скупа  $S$ , слике једни других у томотетијама чији центри припадају правој  $s$ . Спајањем одговарајућих темена суседних полигона добијамо дискретну ротациону површ.



Слика 4.10 Дискретна ротациона површ.

На слици 4.11 представљен је ротациони  $G$ -полиедар. Сви углови код произвољног унутрашњег темена су једнаки, па су и тотални углови  $\theta_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , сваког унутрашњег темена једнаки. Уколико бисмо желели да продужимо ротациони  $G$ -полиедар, додавањем нових страна инцидентних са граничним ивицама, уочили бисмо да су и тотални углови нових унутрашњих темена међусобно једнаки и износе  $4\pi - \theta_i$  и тако редом. ■



Слика 4.11 Ротациони  $G$ -полиедар.

#### 4.4 Особине и генерисање геодезијских мрежа

У примерима 4.1–4.4 презентовали смо једноставне  $G$ -полиедре које смо конструисали користећи њихова основна својства. Питање које се природно поставља је: „Постоји ли метода којом би могли одредити компликованије  $G$ -полиедре?“ Такође, постојање страна (полиедра) представља лимитирајући фактор при покушају одређивања алгорита за њихово генерисање. Стога геодезијске мреже могу бити интересантније за изучавање (састоје се само од темена и ивица).

**Дефиниција 4.20** *Дискретну мрежу чије је свако унутрашње теме парне валенције и код којег је сваки угао између две суседне ивице једнак углу између њима супротних ивица називамо геодезијска или  $G$ -мрежа.*

Наредна особина је директна последица претходне дефиниције.

**Особина 4.3** *Слика  $G$ -мреже при произвољном конформном пресликавању простора  $\mathbf{R}^3$  је  $G$ -мрежа.*

Надаље се усредсређујемо на 4-валентне  $G$ -мреже (то јест оне код којих су сва унутрашња темена валенције четири). Сви наредни резултати једноставно се уопштавају на произвољне  $G$ -мреже.

**Особина 4.4** *Ако је  $p$  теме 4-валентне геодезијске мреже, а  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  њему суседна темена, таква да су  $a$  и  $c$  инцидентна са супротним ивицама, тада важи:*

$$\left( \frac{pa}{|pa|} + \frac{pc}{|pc|} \right) \cdot \left( \frac{pd}{|pd|} - \frac{pb}{|pb|} \right) = 0, \quad (4.4)$$

односно

$$\left( \frac{\mathbf{pb}}{|\mathbf{pb}|} + \frac{\mathbf{pd}}{|\mathbf{pd}|} \right) \cdot \left( \frac{\mathbf{pc}}{|\mathbf{pc}|} - \frac{\mathbf{pa}}{|\mathbf{pa}|} \right) = 0.$$

**Доказ:** Пошто су сви вектори у једнакости (4.4) јединични, довољно је размотрити случај када су све ивице инцидентне са теменом  $\mathbf{p}$  дужине један. Тада важи

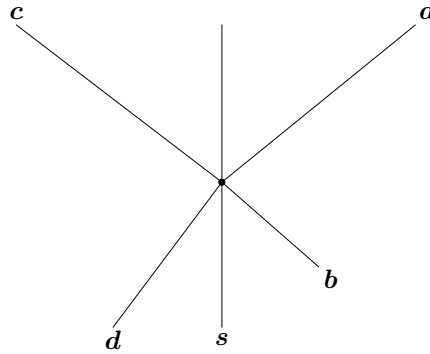
$$(\mathbf{pa} + \mathbf{pc}) \cdot (\mathbf{pd} - \mathbf{pb}) = \mathbf{pa} \cdot \mathbf{pd} + \mathbf{pc} \cdot \mathbf{pd} - \mathbf{pa} \cdot \mathbf{pb} - \mathbf{pc} \cdot \mathbf{pb} \quad (4.5)$$

$$= \cos(\angle \mathbf{apd}) + \cos(\angle \mathbf{cpd}) - \cos(\angle \mathbf{apb}) - \cos(\angle \mathbf{cpb}) = 0. \quad (4.6)$$

Друга једнакост се доказује истим поступком.  $\square$

**Особина 4.5** Ако је  $\mathbf{p}$  теме 4-валентне геодезијске мреже, а  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{d}$  полуправе које садрже ивице инцидентне са тим теменом, такве да  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{c}$  садрже супротне ивице, тада углови одређени полуправама  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{c}$ , односно  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{d}$  имају заједничку симетралу.

**Доказ:** Уколико је угао између неког пара супротних ивица једнак  $\pi$ , тврђење следи тривијално, па претпоставимо да то не важи.



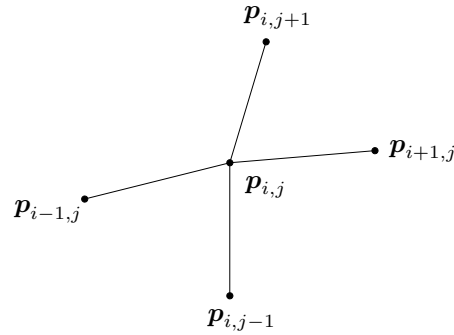
**Слика 4.12** Заједничка симетрала полуправих одређених супротним ивицама 4-валентне  $G$ -мреже.

Нека је  $\mathbf{s}$  симетрала угла одређеног полуправама  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{c}$ . Тада је вектор праве  $\mathbf{s}$ , на основу особине 4.4, ортогоналан на разлику јединичних вектора одређених полуправама  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{d}$ . Но, и вектор симетрале угла одређеног полуправама  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{d}$  је такође ортогоналан на исту разлику. Уз то, обе симетрале садрже тачку  $\mathbf{p}$ , па се оне поклапају.  $\square$

Темена дискретне четворовалентне мреже најчешће ћемо означавати са  $\mathbf{p}_{i,j}$ ,  $i, j = 0, 1, \dots$ , и сматрати да су темена  $\mathbf{p}_{i-1,j}$ ,  $\mathbf{p}_{i+1,j}$ ,  $\mathbf{p}_{i,j-1}$ ,  $\mathbf{p}_{i,j+1}$  суседна темену  $\mathbf{p}_{i,j}$ , при чему су први и други пар инцидентни са супротним ивицама. Користећи особину 4.5, можемо дати једноставан алгоритам којим се генеришу  $G$ -мреже. Наиме, за дата темена  $\mathbf{p}_{i,j-1}$ ,  $\mathbf{p}_{i-1,j}$ ,  $\mathbf{p}_{i+1,j}$  и  $\mathbf{p}_{i,j}$  разликујемо два случаја:

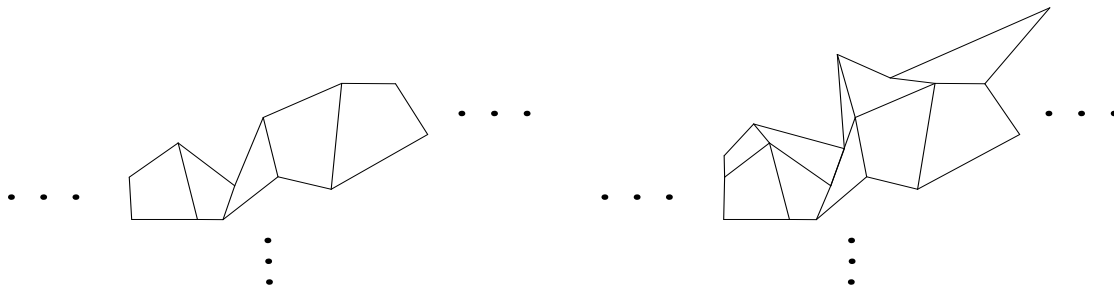
1. Угао  $\angle \mathbf{p}_{i-1,j} \mathbf{p}_{i,j} \mathbf{p}_{i+1,j}$  је једнак  $\pi$ . Тада је преостало теме  $\mathbf{p}_{i,j+1}$  (које је супротно темену  $\mathbf{p}_{i,j-1}$ ), до на дужину ивице  $\mathbf{p}_{i,j} \mathbf{p}_{i,j+1}$ , одређено из услова да припада полуправој симетричној полуправи  $\mathbf{p}_{i,j} \mathbf{p}_{i,j-1}$  у односу на тачку  $\mathbf{p}_{i,j}$ .

2. Угао  $\angle p_{i-1,j}p_{i,j}p_{i+1,j}$  је различит од  $\pi$ . Тада је преостало теме  $p_{i,j+1}$ , до на дужину ивице  $p_{i,j}p_{i,j+1}$ , одређено из услова да припада полуправој симетричној полуправи  $p_{i,j}p_{i,j-1}$  у односу на симетралу угла  $\angle p_{i-1,j}p_{i,j}p_{i+1,j}$ .



Слика 4.13 Темења четворовалентне мреже.

**Пример 4.5** На слици 4.14 (а) је дат део неке геодезијске мреже. Користећи претходни алгоритам, њу можемо продужити до мреже на слици 4.14 (б) и тако редом. ■



Слика 4.14 (а) Део  $G$ -мреже. (б) Продужење  $G$ -мреже.

## 4.5 Процес геодезације

Размотримо проблем добијања геодезијске мреже од произвољне дискретне мреже чија су унутрашња темења парне валенције. У ту сврху направимо један излет у теорију минимизације диференцијабилних функција.

У случају да је  $f : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}$  диференцијабилна функција, уочимо низ  $\{x_k\}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , тачака простора  $\mathbf{R}^n$  који је генерисан рекурентном формулом  $x_{k+1} = x_k + h_k s_k$ ,  $k = 0, 1, \dots$ ,

при чему је  $\mathbf{s}_k$  вектор који одређује смер којим се из тачке  $\mathbf{x}_k$  иде у следећу тачку низа, док се позитиван број  $h_k$  назива корак ( $k+1$ ) итерације. У зависности од начина избора вектора  $\mathbf{s}_k$  и корака  $h_k$ , разликујемо методе минимизације функције  $f$ . Све оне задовољавају услов

$$\nabla f(\mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{s}_k \leq -\rho \|\nabla f(\mathbf{x}_k)\| \|\mathbf{s}_k\|, \quad \rho > 0,$$

који гарантује опадање функције  $f$  с преласком из тачке  $\mathbf{x}_k$  у тачку  $\mathbf{x}_{k+1}$ .

Општи алгоритам ових метода је:

**Корак 1.** Произвољно одабрати почетну тачку  $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ . Поставити  $k = 0$ .

**Корак 2.** Израчунати  $\nabla f(\mathbf{x}_k)$ . Уколико важи  $\nabla f(\mathbf{x}_k) = 0$ , итерација је завршена. Иначе, ићи на корак 3.

**Корак 3.** Одредити вектор  $\mathbf{s}_k$ .

**Корак 4.** Одредити корак  $h_k$ . На пример, као број у којем се достиже минимум функције  $f(\mathbf{x}_k + h\mathbf{s}_k)$  на скупу  $h \geq 0$ . Ипак, често се, ради једноставности, у свакој итерацији користи исти (довољно мали) корак.

**Корак 5.** Заменили тачку  $\mathbf{x}_k$  тачком  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h_k\mathbf{s}_k$ , а  $k$  са  $k+1$  и ићи на корак 2.

Најважнија својства метода минимизације диференцијабилних функција дата су следећом теоремом.

**Теорема 4.2** Претпоставимо да је функција  $f$  непрекидно диференцијабилна на  $\mathbf{R}^n$  и да метода генерише низ  $\{\mathbf{x}_k\}$ . Тада важи:

- (а) низ  $f(\mathbf{x}_k)$  је опадајући;
- (б) за неку вредност  $m$  је испуњено  $\nabla f(\mathbf{x}_m) = 0$  или свака тачка нагомилавања  $\tilde{\mathbf{x}}$  задовољава услов  $\nabla f(\tilde{\mathbf{x}}) = 0$ ;
- (в) ако је функција  $f$  конвексна, свака тачка нагомилавања  $\tilde{\mathbf{x}}$  низа  $\{\mathbf{x}_k\}$  је тачка минимума функције  $f$ ;
- (г) ако је функција  $f$  строго конвексна, низ  $\{\mathbf{x}_k\}$  конвергира ка јединственој тачки минимума функције  $f$ .

**Доказ:**

(а) Користећи Лагранжову теорему о средњој вредности добијамо:

$$f(\mathbf{x}_k + h\mathbf{s}_k) = f(\mathbf{x}_k) + h\nabla f(\boldsymbol{\xi}_k) \cdot \mathbf{s}_k,$$

за неку вредност  $\boldsymbol{\xi}_k = \mathbf{x}_k + \alpha h\mathbf{s}_k$ ,  $\alpha \in (0, 1]$ ,  $h > 0$ . Због непрекидности градијента и скаларног производа, за довољно мало  $\delta$ , важи

$$f(\mathbf{x}_k + h\mathbf{s}_k) \leq f(\mathbf{x}_k) - \frac{h}{2}\rho \|\nabla f(\mathbf{x}_k)\| \|\mathbf{s}_k\|, \quad 0 < h \leq \delta.$$

Ако важи  $\nabla f(\mathbf{x}_k) \neq 0$ , из горњег следи  $f(\mathbf{x}_k + h\mathbf{s}_k) < f(\mathbf{x}_k)$ , за  $0 < h \leq \delta$ , што имплицира  $f(\mathbf{x}_{k+1}) = f(\mathbf{x}_k + h\mathbf{s}_k) < f(\mathbf{x}_k)$ .

- (б) Претпоставимо да метода генерише бесконачан низ  $\{\mathbf{x}_k\}$  који има подниз  $\{\mathbf{x}_k\}$ ,  $k \in K \subset \mathbf{N}$  који конвергира тачки  $\tilde{\mathbf{x}}$ . Не умањујући општост, можемо претпоставити да важи  $\|\mathbf{s}_k\| = 1$ . Нека је, супротно тврђењу,  $\nabla f(\tilde{\mathbf{x}}) \neq 0$ . Означимо са  $\mathbf{s}$  тачку нагомилавања низа  $\{\mathbf{s}_k\}$  којој конвергира неки његов подниз  $\{\mathbf{s}_k\}$ ,  $k \in K_1 \subset K$ . Због непрекидности градијента и скаларног производа важи  $\nabla f(\mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{s}_k \rightarrow \nabla f(\tilde{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{s}$  када  $k \in K_1$ ,  $k \rightarrow \infty$ . Због начина избора вектора  $\mathbf{s}_k$ , важи и  $\nabla f(\tilde{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{s} \leq \rho \|\nabla f(\tilde{\mathbf{x}})\| \leq 0$ . Како су градијенти непрекидни, постоји  $\varepsilon > 0$ , такво да за све тачке  $\mathbf{x}$  које задовољавају  $\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\| < \varepsilon$  и свако довољно велико  $k \in K_1$ , важи

$$\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{s}_k \leq -\frac{\rho}{2} \|\nabla f(\tilde{\mathbf{x}})\| < 0.$$

Специјално, за тачку  $\mathbf{x}_{k_n}$ ,  $k_n \in K_1$  која задовољава  $\|\mathbf{x}_{k_n} - \tilde{\mathbf{x}}\| < \frac{\varepsilon}{2}$ , имамо

$$f(\mathbf{x}_{k_n} + \frac{\varepsilon}{2} \mathbf{s}_{k_n}) - f(\mathbf{x}_{k_n}) = \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \nabla f(\mathbf{x}_{k_n} + \alpha \frac{\varepsilon}{2} \mathbf{s}_{k_n}) < -\frac{\rho}{2} \|\nabla f(\tilde{\mathbf{x}})\| \frac{\varepsilon}{2},$$

за неко  $\alpha \in (0, 1)$ . Тим пре важи и

$$f(\mathbf{x}_{k_{n+1}}) - f(\mathbf{x}_{k_n}) \leq f(\mathbf{x}_{k_{n+1}}) - f(\mathbf{x}_{k_n}) \leq -\frac{\rho\varepsilon}{4} \|\nabla f(\tilde{\mathbf{x}})\|,$$

одакле, сабирањем по  $n$ , закључујемо да функција  $f$  није ограничена на компактном скупу. Контрадикција!

- (в) Ако је  $f$  конвексна функција, на основу претходног, следи да је свака тачка нагомилавања  $\tilde{\mathbf{x}}$  стационарна тачка, па је она и тачка минимума функције  $f$ .
- (г) Ако је  $f$  строго конвексна функција, сваки подниз  $\{\mathbf{x}_k\}$ ,  $k \in K \subset \mathbf{N}$  из доказа случаја (б) конвергира јединственој тачки минимума, па и цео низ конвергира истој тачки.  $\square$

Избором вектора  $\mathbf{s}_k = -\nabla f(\mathbf{x}_k)$ , добијамо методу најбржег спуштања или градијентну методу, коју надаље користимо.

Нека је  $\mathcal{S}$  дискретна четворовалентна мрежа и нека је  $M_0$  скуп њених унутрашњих темена која ћемо означити са  $\mathbf{p}_{i,j}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ . И нека су

$$\alpha_1^{\mathbf{p}_{i,j}} \text{ и } \alpha_0^{\mathbf{p}_{i,j}}, \text{ односно } \beta_1^{\mathbf{p}_{i,j}} \text{ и } \beta_0^{\mathbf{p}_{i,j}}$$

парови супротних углова код темена  $\mathbf{p}_{i,j}$ . Размотримо проблем минимизације функције

$$E(M_0) = \sum_{\mathbf{p}_{i,j}} ((\alpha_1^{\mathbf{p}_{i,j}} - \alpha_0^{\mathbf{p}_{i,j}})^2 + (\beta_1^{\mathbf{p}_{i,j}} - \beta_0^{\mathbf{p}_{i,j}})^2). \quad (4.7)$$

Горња функција испуњава услове теореме 4.2. Сваки од углова можемо написати у функцији од њему одговарајућих темена, али би се тиме посматрана функција закомпликовала. С друге стране, неопходно је да одредимо градијент угла у њему одговарајућем темену, што ћемо сада урадити.

Нека је  $\triangle pqr$  произвољан троугао и нека његова темена имају координате  $\mathbf{p}(x, y, z)$ ,  $\mathbf{q}(q_1, q_2, q_3)$  и  $\mathbf{r}(r_1, r_2, r_3)$ . Означимо са  $\alpha$  угао код темена  $\mathbf{p}$ .

Диференцирањем функције

$$\alpha(x, y, z) = \arccos \frac{\mathbf{pq} \cdot \mathbf{pr}}{|\mathbf{pq}| |\mathbf{pr}|},$$

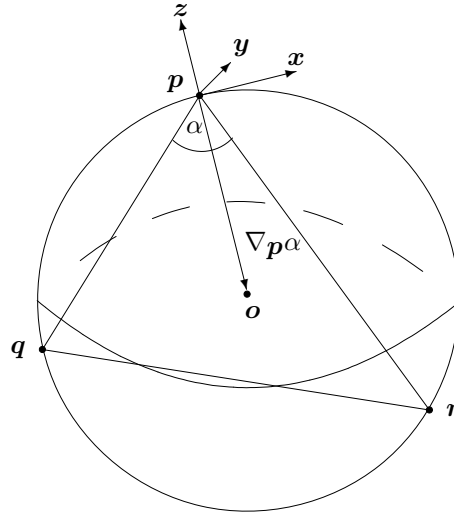
по променљивим  $x$ ,  $y$  и  $z$ , добијамо

$$\nabla_{\mathbf{p}}\alpha = \frac{\sin \alpha^2}{\Delta} \mathbf{p}\mathbf{o}, \quad (4.8)$$

где смо са  $\Delta$  означили површину троугла  $\Delta\mathbf{pqr}$ , док је тачка  $\mathbf{o}$  центар описаног круга тог троугла. Геометријско тумачење чињенице да је градијент угла  $\alpha$  у темену  $\mathbf{p}$  колинеаран вектору  $\mathbf{p}\mathbf{o}$  је следеће: Градијент угла у њему одговарајућем темену  $\mathbf{p}$  је вектор који одређује кретање тачке  $\mathbf{p}$  које је такво да угао  $\alpha$  том приликом најбрже расте. Разматрајмо описани круг троугла  $\Delta\mathbf{pqr}$  и сферу којој је тај круг велики круг. Одаберимо координатни систем такав да је  $z$ -оса одређена вектором  $\mathbf{p}\mathbf{o}$  док друге две осе припадају тангентној равни сфере у тачки  $\mathbf{p}$ . Тада градијент угла  $\alpha$  у темену  $\mathbf{p}$  можемо представити као линеарну комбинацију координатних вектора:

$$\nabla_{\mathbf{p}}\alpha = a\mathbf{x} + b\mathbf{y} + c\mathbf{z}. \quad (4.9)$$

Но, линеарна комбинација вектора  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  је вектор који одређује кретање тачке  $\mathbf{p}$  ка спољашњости сфере, којом приликом угао  $\alpha$  опада. Зато се најбржи раст угла  $\alpha$  постиже када у једнакости (4.9) важи  $a = b = 0$ .



Слика 4.15 Градијент угла.

Применимо градијентну методу минимизације диференцијабилних функција на функцију (4.7). Градијент разматране функције је

$$\begin{aligned} \nabla_{M_0} E(M_0) &= \nabla_{M_0} \sum_{\mathbf{P}_{i,j}} ((\alpha_1^{\mathbf{P}_{i,j}} - \alpha_0^{\mathbf{P}_{i,j}})^2 + (\beta_1^{\mathbf{P}_{i,j}} - \beta_0^{\mathbf{P}_{i,j}})^2) \\ &= \sum_{\mathbf{P}_{i,j}} 2((\alpha_1^{\mathbf{P}_{i,j}} - \alpha_0^{\mathbf{P}_{i,j}})(\nabla_{\mathbf{P}_{i,j}} \alpha_1^{\mathbf{P}_{i,j}} - \nabla_{\mathbf{P}_{i,j}} \alpha_0^{\mathbf{P}_{i,j}}) \\ &\quad + (\beta_1^{\mathbf{P}_{i,j}} - \beta_0^{\mathbf{P}_{i,j}})(\nabla_{\mathbf{P}_{i,j}} \beta_1^{\mathbf{P}_{i,j}} - \nabla_{\mathbf{P}_{i,j}} \beta_0^{\mathbf{P}_{i,j}})). \end{aligned}$$

Итеративни процес је дат са

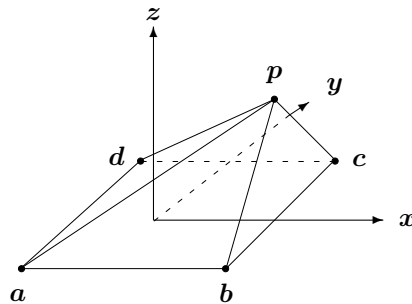
$$\mathbf{M}_{k+1} = \mathbf{M}_k - h_k \nabla_{\mathbf{M}_k} E(\mathbf{M}_k), \quad (4.10)$$

где је  $\mathbf{M}_k$  скуп унутрашњих темена добијен у  $k$ -тој итерацији. Гранична темена нису обухваћена итеративним процесом и она се не мењају. Теорема 4.2 тврди да важи

$$E(\mathbf{M}_{k+1}) \leq E(\mathbf{M}_k).$$

Наравно, уколико за неко  $t$  важи  $E(\mathbf{M}_t) = 0$ , добијена мрежа је геодезијска. Генерално, то се не мора догодити. Наиме, тврђење теореме да за неко  $n$  важи  $\nabla E(\mathbf{M}_n) = 0$  не имплицира једнакост  $E(\mathbf{M}_n) = 0$ . Ипак, најчешће након одређеног броја итерација функција  $E$  постаје блиска нули, што значи да се том приликом добија мрежа блиска геодезијској. Претходно описани итеративни процес зовемо **процес геодезације** дате дискретне мреже.

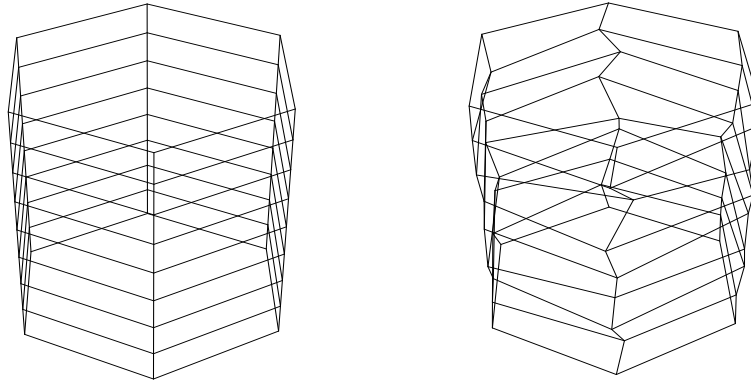
**Пример 4.6** Нека се мрежа  $\mathcal{S}$  састоји од граничних темена  $\mathbf{a}(-1, -1, 0)$ ,  $\mathbf{b}(1, -1, 0)$ ,  $\mathbf{c}(1, 1, 0)$  и  $\mathbf{d}(-1, 1, 0)$  и једног унутрашњег темена  $\mathbf{p}(1, 0, 1)$ . Применом описаног итеративног процеса за различите изборе итеративног корака, тачка  $\mathbf{p}$  конвергира различитим тачкама за које се достиже минимум функције  $E$ . Наиме, минимум се достиже у свакој тачки  $z$ -осе. ■



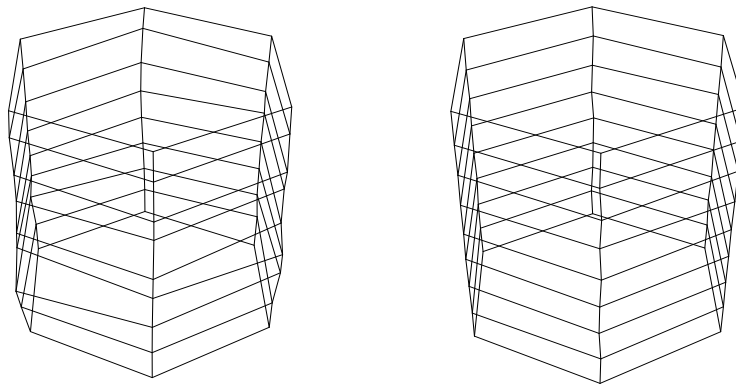
Слика 4.16 Геодезација дискретне мреже која има једно унутрашње теме.

Растојање тачке  $\mathbf{p}_{i,j}^{(k)}$  из  $k$ -те итерације и  $\mathbf{p}_{i,j}^{(k+1)}$  из наредне једнако је  $h_k \|\nabla_{\mathbf{p}_{i,j}^{(k)}} E(\mathbf{p}_{i,j}^{(k)})\|$  и оно није ограничено јер норма градијента угла (4.8) може бити произвољно велика, што се најлакше види ако се површина троугла напише у облику  $\Delta = 4\rho^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ , где је  $\rho$  полупречник описаног круга. У случају да у итеративном процесу површина троугла одређеног са три темена дискретне мреже (од којих су два суседна трећем) не тежи нули, растојање одговарајућих темена можемо учинити произвољно малим коришћењем довољно малог итеративног корака.

**Пример 4.7 (цилиндар)** Мериђијани и паралеле цилиндра могу бити параметризовани као геодезијске криве и они чини једну мрежу кривих којој одговара 4-валентна геодезијска мрежа. Једна таква мрежа је презентована на слици 4.17 (а). Та дискретна мрежа је геодезијска, што се једноставно проверава. С друге стране, слика 4.17 (б) илуструје другу дискретну мрежу (скуп њених унутрашњих темена ћемо означити са  $\mathbf{M}_0$ ) генерисану нешто другачијим скупом кривих цилиндра која није геодезијска (важи  $E(\mathbf{M}_0) \approx 96,7041$ ). Применимо на ту мрежу поступак геодезације. Како се унутрашња темена током итерације не би много удаљила од цилиндра, одабраћемо довољно мали корак који ћемо примењивати у свакој итерацији (нажалост, то ће условити велики број итерација). Резултати итеративног процеса презентовани су на слици 4.18. ■

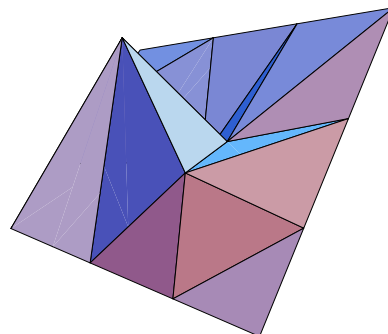


Слика 4.17 (а) 4-валентна  $G$ -мрежа генерисана меридијанима и паралелама цилиндра. (б) Дискретна мрежа са скупом унутрашњих темена  $M_0$ .



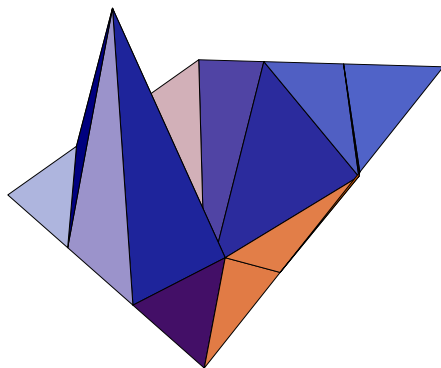
Слика 4.18 (а) Дискретна мрежа добијена након 1000 итерација извршених са кораком  $h = 5 \cdot 10^{-6}$ . Важи  $E(M_{1000}) \approx 10$ . (б) Дискретна мрежа добијена након 5000 итерација извршених са кораком  $h = 5 \cdot 10^{-6}$ . Важи  $E(M_{5000}) \approx 0,8$ .

**Пример 4.8** Процес геодезације је применљив у случају произвољног полиедра чије су стране троуглови. Тиме добијамо компликованије полиедре од оних из примера 4.1–4.4. Код тих полиедара функција  $E$  није једнака већ је (након довољног броја итерација) блиска нули, те ћемо их звати **квази  $G$ -полиедри** (слике 4.19 и 4.20). ■





Слика 4.19 Полиедар са четири унутрашња темена. Важи  $E(M_0) \approx 20,0930$ .



Слика 4.20 Квази  $G$ -полиедар добијен применом процеса геодезације на претходни.



# Глава 5

## Геодезијска дискретизација

---

У овој глави разматрамо геодезијску дискретизацију глатких површи, констатујемо њене предности, али и недостатке.

### 5.1 Дефиниција и особине

Највише пребројив скуп кривих неке површи простора  $\mathbf{R}^3$  можемо разматрати као граф смештен на ту површ. Врхови графа су тачке пресека тих кривих, а гране делови кривих који спајају врхове. Уколико гране тог графа заменимо правим линијама добијамо нови граф који има исти скуп темена као и полазни. Добијени граф је јединствено одређен полазним и он представља једну дискретну мрежу простора  $\mathbf{R}^3$ . Такав поступак добијања дискретне мреже називамо **дискретизација** мреже кривих глатке површи.

**Дефиниција 5.1** Нека је  $\Gamma$  скуп геодезијских кривих површи  $M$  које су дефинисане на максималном интервалу (види причу која претходи дефиницији 2.6). Дискретизацију тог скупа кривих називамо **геодезијска дискретизација**.

Важно питање при дискретизацији је: „Колико ивице дискретне мреже одступају од кривих глатке површи?” Јасно је да свакој ивици дискретне мреже добијене геодезијском дискретизацијом одговара део геодезијске криве скупа  $\Gamma$ , чиме је одступање ивице сведено на минимум. А ако се све ивице дискретне мреже поклапају са ивицама неког полиедра, тада су њима одређене стране тог полиедра, па можемо говорити о његовој површини. У наредним примерима бавимо се апроксимацијом површине глатке површи површином дискретне генерисане геодезијском дискретизацијом.

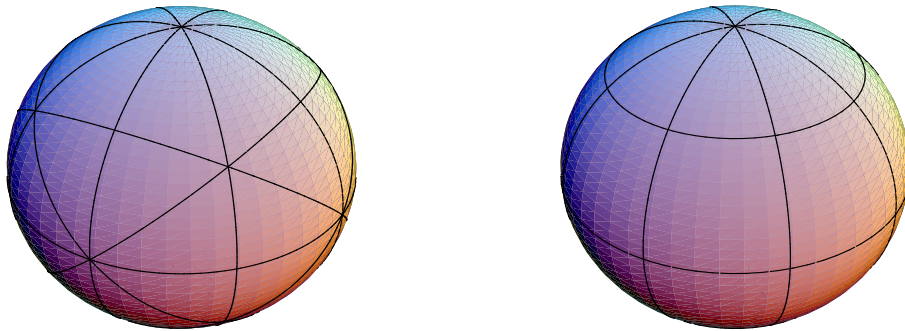
**Пример 5.1 (сфера)** На основу леме 2.9 (пример 2.2), геодезијска мрежа  $\Gamma$  сфере  $\mathbf{S}^2$ , од које се геодезијском дискретизацијом добија дискретна мрежа  $\mathcal{S}_1$ , састоји се од великих кругова те сфере. На слици 5.1 (а) приказана је мрежа геодезијских кривих сфере  $\mathbf{S}^2(u, v) = (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v)$ ,  $0 \leq u \leq 2\pi$ ,  $0 \leq v \leq \pi$ . Њу чини осам меридијана  $m_i(v) = (\cos t_i \sin v, \sin t_i \sin v, \cos v)$ ,  $0 \leq v \leq \pi$ , где је  $t_i$  фиксиран број сегмента  $[0, 2\pi]$ , затим, паралела  $p(u) = (\cos u, \sin u, 0)$ ,  $0 \leq u \leq 2\pi$  и велики кругови који полове углове између паралеле  $p$  и сваког другог меридијана

$m_i$ . На тај начин, сфера је подељена на 48 елементарних површи и свакој од њих одговара по једна страна полиедра одређеног дискретном мрежом  $\mathcal{S}_1$ , који ћемо, ради једноставности, исто тако означити.

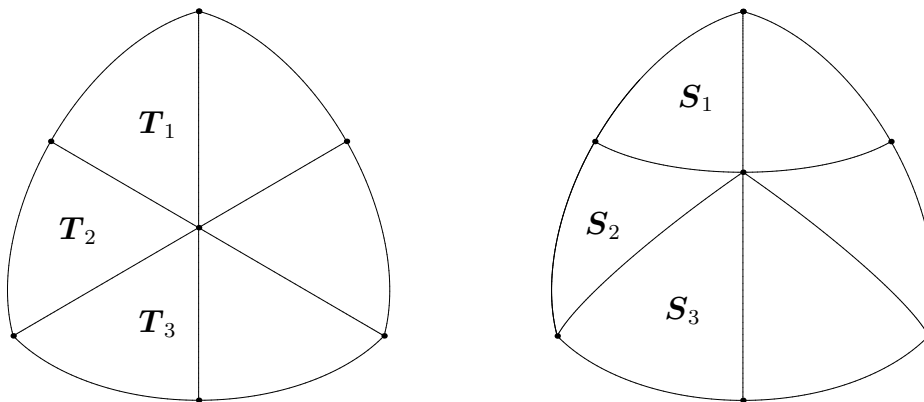
Насупрот оваквој дискретизацији, можемо разматрати уобичајену дискретизацију сфере генерисану меридијанима и паралелама (слика 5.1 (б)). Након што сваки сферни четвороугао дијагоналном поделимо на два сферна троугла добијамо мрежу која генерише полиедар  $\mathcal{S}_2$  који, такође, има 48 страна.

У оба случаја је, због симетрије, довољно посматрати само део сфере који се налази у првом октанту (слика 5.2). Израчунајмо површине и запремине та два полиедра.

Темена сферних троуглова са слике 5.2 (а) су  $T_1 : (0, 0, 1), (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}), (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ ,  $T_2 : (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}), (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}), (1, 0, 0)$ , односно  $T_3 : (0, 0, 1), (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}), (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ . Слично, темена сферних троуглова са слике 5.2 (б) су  $S_1 : (0, 0, 1), (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ,  $S_2 : (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}), (1, 0, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ , односно  $S_3 : (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), (1, 0, 0), (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ .



Слика 5.1 (а) Геодезијска мрежа сфере. (б) Мрежа коју чине меридијани и паралеле сфере.



Слика 5.2 (а) Геодезијска мрежа сфере, посматрана у првом октанту. (б) Мрежа коју чине меридијани и паралеле сфере, посматрана у првом октанту.

Ако страну полиедра која одговара сферном троуглу  $T_i$  (односно  $S_i$ ),  $i = 1, 2, 3$ , означимо са  $\tilde{T}_i$  (односно  $\tilde{S}_i$ ), онда се њихове површине и запремине конуса над њима једноставно израчунавају и дате су у наредној табели.

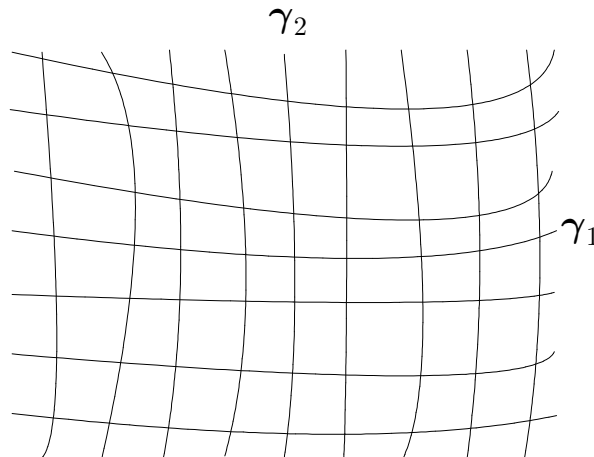
$i$	$P(\tilde{T}_i)$	$P(\tilde{S}_i)$	$V(\tilde{T}_i)$	$V(\tilde{S}_i)$
1	0,2303	0,1937	0,0680	0,0589
2	0,2303	0,2049	0,0680	0,0589
3	0,2303	0,2897	0,0680	0,0833

Табела 5.1 Површине и запремине.

Површина и запремина полиедра  $S_1$  износе  $P(S_1) = 48 \cdot P(\tilde{T}_1) = 11,0530$ , односно  $V(S_1) = 48 \cdot V(\tilde{T}_1) = 3,2660$ , док површина и запремина полиедра  $S_2$  износе  $P(S_2) = 16(P(\tilde{S}_1) + P(\tilde{S}_2) + P(\tilde{S}_3)) = 11,0134$ ,  $V(S_2) = 16(V(\tilde{S}_1) + V(\tilde{S}_2) + V(\tilde{S}_3)) = 3,2190$ . Површина и запремина унутрашњости јединичне сфере  $S^2$  су  $P(S^2) = 12,5664$  и  $V(S^2) = 4,1888$ . На основу претходног, полиедар добијен геодезијском дискретизацијом боље апроксимира сферу  $S^2$ , што се тиче површине и запремине. Ипак, крупан недостатак овакве дискретизације сфере је непостојање једноставног алгорита за добијање гушће дискретне мреже. ■

## 5.2 Четвороугаоне мреже

Нека су  $\gamma_1 : (a, b) \mapsto M$  и  $\gamma_2 : (c, d) \mapsto M$  геодезијске криве површи  $M$  које се секу у тачки  $p$ , то јест постоје вредности  $t_0 \in (a, b)$  и  $s_0 \in (c, d)$ , такве да важи  $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(s_0) = p$ . Нека су, даље,  $t_{-m}, t_{-m+1}, \dots, t_0, \dots, t_{n-1}, t_n$  и  $s_{-k}, s_{-k+1}, \dots, s_0, \dots, s_{l-1}, s_l$ , растући низови тачака интервала  $(a, b)$ , односно  $(c, d)$  и нека је  $\gamma_1(t_i) = p_{1,i}$ ,  $i = -m, \dots, n$ , односно  $\gamma_2(s_j) = p_{2,j}$ ,  $j = -k, \dots, l$ .



Слика 5.3 Четвороугаона мрежа.

Означимо са  $\Gamma_1$  скуп геодезијских кривих површи  $\mathcal{M}$ , одређених тачкама  $\mathbf{p}_{1,i}$ ,  $i = -m, \dots, n$ , и неким тангентним векторима  $\mathbf{v}_{\mathbf{p}_{1,i}} \in T_{\mathbf{p}_{1,i}}\mathcal{M}$  и слично, нека је  $\Gamma_2$  скуп геодезијских кривих површи  $\mathcal{M}$ , одређених тачкама  $\mathbf{p}_{2,j}$ ,  $j = -k, \dots, l$ , и неким тангентним векторима  $\mathbf{v}_{\mathbf{p}_{2,j}} \in T_{\mathbf{p}_{2,j}}\mathcal{M}$ . Приметимо да криве  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  не морају припадати мрежи  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , која, због произвољности тангентних вектора, може бити различите тополошке структуре. За нас је посебно интересантан случај када су све криве мреже  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  дефинисане на максималном интервалу и када криве сваког од скупова  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, 2$ , немају заједничких тачака. Такву мрежу ћемо звати **четвороугаона мрежа**. Следећа лема је директна последица дефиниције 5.1.

**Лема 5.1** *Четвороугаона мрежа генерише геодезијску дискретизацију глатке површи.*

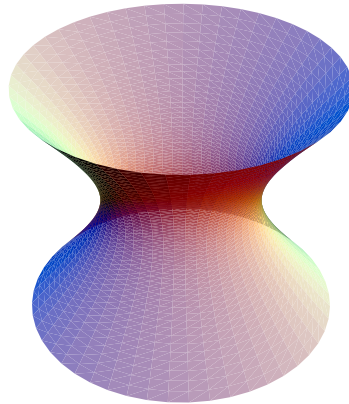
Јасно је да, у овом случају, сваку дискретну мрежу добијену геодезијском дискретизацијом, можемо учинити произвољно густом, додавањем нових геодезијских кривих.

Уочимо да дискретизација коришћењем четвороугаоне мреже није могућа (или је, пак, ограничено могућа) у случају произвољне глатке површи. На пример, у случају сфере  $\mathbf{S}^2$ , таква дискретизација је изводљива само ако су скупови  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  једночлани. Наиме, сваке две геодезијске криве сфере, дефинисане на максималном интервалу, су велики кругови који се секу или поклапају.

**Пример 5.2 (једнограни хиперболоид)** На основу теореме 2.6 (пример 2.3), сваки меридијан ротационе површи, чија је стандардна параметризација дата са (2.10), може бити параметризован тако да постане геодезијска крива, док је то случај са паралелом, уколико је испуњен услов  $\varphi'(v_0) = 0$ . Овај последњи услов је, нажалост, врло јак, тако да дискретизација ротационе површи генерисана мрежом меридијана и паралели најчешће није геодезијска. На пример, у случају једнограног хиперболоида, чија је стандардна параметризација

$$\mathit{hyperboloid}(u, v) = (\cos u \cosh v, \sin u \cosh v, \sinh v), \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad -\infty < v < \infty,$$

само једна паралела (која припада  $xy$ -равни) је геодезијска крива.



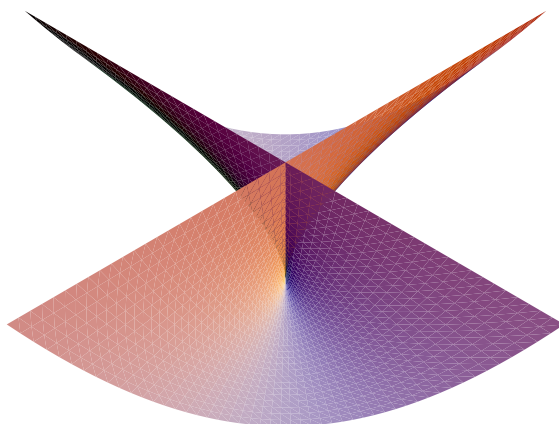
**Слика 5.4** Једнограни хиперболоид,  $0 \leq u \leq 2\pi$ ,  $-1.5 \leq v \leq 1.5$ .

Ротациони  $G$ -полиедар из примера 4.4, представља пример како може изгледати резултат геодезијске дискретизације једнограног хиперболоида. У том случају кривама геодезијске мреже једнограног хиперболоида одговарају низови супротних ивица дискретне ротационе површи који представљају дискретне геодезијске криве, па можемо рећи да је геодезичност глатке мреже сачувана при преласку на дискретан случај. ■

**Пример 5.3 (Витнијев<sup>1</sup> кишобран)** Површ чија је параметризација

$$\mathbf{Vitni}(u, v) = (uv, u, v^2), \quad -\infty < u, v < \infty, \quad (5.1)$$

називамо Витнијев кишобран.



Слика 5.5 Витнијев кишобран,  $-1 \leq u, v \leq 1$ .

Општи поступак одређивања геодезијске дискретизације објаснићемо на примеру ове површи. Геодезијске једначине (2.8), у случају Витнијевог кишобрана, гласе:

$$\begin{cases} u'' + \frac{8u'v'v^3}{u^2 + 4v^2 + 4v^4} - \frac{4v'^2uv^2}{u^2 + 4v^2 + 4v^4} = 0, \\ v'' + \frac{2u'v'u}{u^2 + 4v^2 + 4v^4} + \frac{4v'^2(v^3 + v)}{u^2 + 4v^2 + 4v^4} = 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

Решавањем горњег система диференцијалних једначина, у зависности од почетних услова, добијамо различите геодезијске криве Витнијевог кишобрана. Геодезијска крива је, на основу теореме 2.3, јединствено одређена задавањем тачке из које полази и одговарајућег тангентног вектора, то јест додавањем почетних услова на систем (5.5). Приметимо да су криве

$$u \mapsto (0, u, 0), \quad -\infty < u < \infty, \quad (5.3)$$

$$v \mapsto (0, 0, v^2), \quad -\infty < v < \infty, \quad (5.4)$$

праве (што значи да могу бити параметризоване као геодезијске) линије површи (5.1). Штавише, све  $u$ -параметарске криве  $u \mapsto (uv_0, u, v_0^2)$  су праве линије и све оне секу праву (5.4). Да бисмо одредили четвороугаону мрежу потребне су нам и геодезијске криве које секу праву (5.3).

Размотримо део Витнијевог кишобрана који се добија за  $-2 \leq u, v \leq 2$ . Геодезијске криве које су одређење еквидистантно распоређеним тачкама праве (5.3) и тангентним векторима који припадају равнима ортогоналним на исту праву одредићемо у неколико корака коришћењем метода нумеричке математике.

<sup>1</sup>Hassler Whitney (1907–1989), амерички математичар.

**Корак 1.** Трансформација система (5.2) у њему еквивалентан систем од четири диференцијалне једначине првог реда (види напомену 2.1):

$$\begin{cases} u' = p, \\ v' = q, \\ p' = \frac{4q^2uv^2 - 8pqv^3}{u^2 + 4v^2 + 4v^4}, \\ q' = -\frac{4q^2(v^3 + v) + 2pqu}{u^2 + 4v^2 + 4v^4}. \end{cases} \quad (5.5)$$

**Корак 2.** Додавање почетних услова горењем систему.

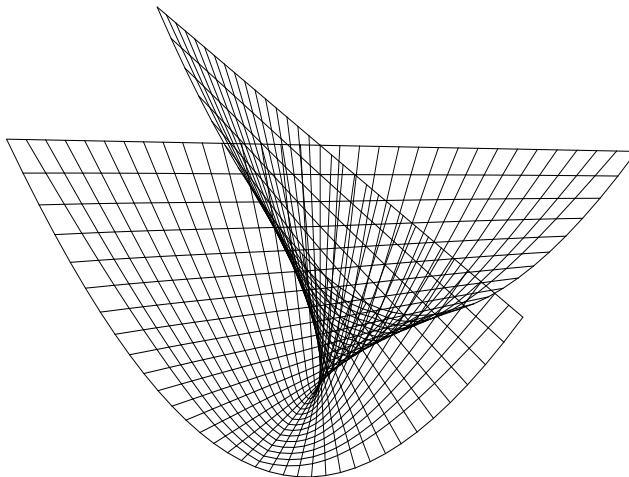
**Корак 3.** Решавање система (5.5) коришћењем, на пример, неке од метода Рунге–Кута описаних у глави 3. Као резултат добијамо скупове приближних вредности резултујућих функција ( $u(t)$  и  $v(t)$ ,  $t \in (-2, 2)$ ).

**Корак 4.** Формирање интерполационих функција  $P^u$  и  $P^v$ , коришћењем скупова тачака из претходног корака.

**Корак 5.** Одређивање апроксимација тражених геодезијских кривих, заменом  $u$  са  $P^u$  и  $v$  са  $P^v$  у једначини површи (5.1).

**Корак 6. (опционо)** Графички приказ апроксимација из претходног корака.

**Напомена 5.1** Приметимо да, захваљујући симетрији, можемо разматрати само део површи (5.1) који добијамо за  $0 \leq u, v \leq 2$ . У кораку 3 можемо користити евидистантну мрежу  $nh$ ,  $n = 0, 1, \dots, \frac{2}{h}$  (на пример  $h = 0,1$  или  $h = 0,05$ ; што је  $h$  мање, то је апроксимација прецизнија). У кораку 4 можемо користити (али не нужно) полиномијалну интерполацију. Резултат последњег корака је слика 5.6.



**Слика 5.6** Четвороугаона мрежа дела Витнијевог кишобрана  $-2 \leq u, v \leq 2$ , која ограничава 1088 елементарних површи.



Приметимо да дискретна мрежа добијена геодезијском дискретизацијом не одређује полиедар са истим скупом ивица. Стога ћемо за свако унутрашње теме  $p_{i,j}$  дискретне мреже додати још две ивице  $p_{i,j}p_{i-1,j-1}$  и  $p_{i,j}p_{i+1,j+1}$  инцидентне са њим. Израчунајмо површину добојеног полиедра. Резултат рачуна је дат у наредној табели (са  $\mathcal{P}$  смо означили добијени полиедар).

границе	$P(\text{Vitni})$	број унутрашњих темена	$P(\mathcal{P})$
$-1 \leq u, v \leq 1$	5,5743	9	5,5569
		16	5,5687
		49	5,5699
		225	5,5728
		361	5,5733
$-2 \leq u, v \leq 2$	59,3108	9	55,1305
		16	58,1980
		49	58,8655
		225	58,9599
		361	59,0053
		1088	59,3051

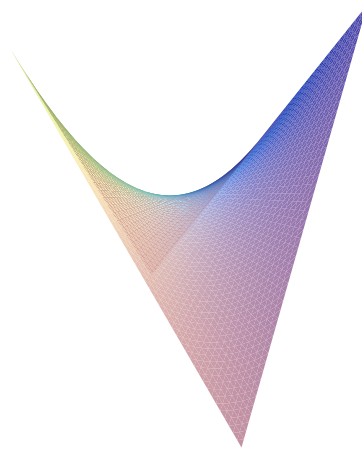
Табела 5.2 Површине различитих полиедара добијених геодезијском дискретизацијом Витнијевог кишобрана.

■

### 5.3 Асимптотско–геодезијске мреже

На основу леме 2.6, крива површи простора  $\mathbf{R}^3$  може бити параметризована као (истовремено) асимптотска и геодезијска ако и само ако је њен траг права линија.

**Дефиниција 5.2** Мрежу која се састоји од истовремено асимптотских и геодезијских кривих називамо асимптотско–геодезијска мрежа.



Слика 5.7 Хиперболички параболоид,  $-2 \leq u, v \leq 2$ .

Дискретне мреже генерисане мрежом асимптотско–геодезијских кривих имају једну лепу особину: њихове ивице припадају глаткој површи.

**Пример 5.4 (хиперболички параболоид)** Једна параметризација хиперболичког параболоида дата је са

$$\mathit{hipparaboloid}_1(u, v) = (u, v, uv), \quad -\infty < u, v < \infty. \quad (5.6)$$

$u$  и  $v$ -параметарске криве  $u \mapsto (u, v_0, uv_0)$ , односно  $v \mapsto (u_0, v, u_0v)$  хиперболичког параболоида, представљају праве које могу бити параметризоване као истовремено асимптотске и геодезијске криве.

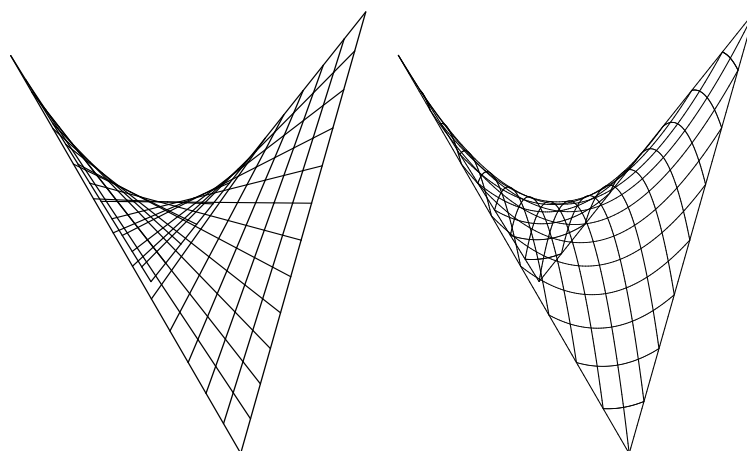
Уочимо да се изометријском трансформацијом

$$u = p + q, \quad v = p - q,$$

хиперболички параболоид (5.6) трансформише у површ

$$\mathit{hipparaboloid}_2(p, q) = (p + q, p - q, p^2 - q^2), \quad -\infty < p, q < \infty. \quad (5.7)$$

$p$  и  $q$ -параметарске криве  $p \mapsto (p + q_0, p - q_0, p^2 - q_0^2)$ , односно  $q \mapsto (p_0 + q, p_0 - q, p_0^2 - q^2)$ , површи (5.7), представљају параболе, које ће нам послужити за формирање још једне мреже исте површи. Та мрежа није геодезијска, јер горње параболе не задовољавају систем геодезијских једначина (2.8), што се директно проверава.



**Слика 5.7** (а) Асимптотско–геодезијска и (б) мрежа генерисана параболома дела хиперболичког параболоида  $(u, v) \mapsto (u, v, uv)$ ,  $-1 \leq u, v \leq 1$ , које ограничавају 144 елементарне површи.

Слично као у претходном примеру, долазимо до полиедара  $\mathcal{P}_1$  и  $\mathcal{P}_2$  који одговарају првој и другој дискретизацији.

границе	$P(\text{hipparaboloid}_1) = P(\text{hipparaboloid}_2)$	број унутр. темена	$P(\mathcal{P}_1)$	$P(\mathcal{P}_2)$
$-1 \leq u, v \leq 1$	5,1235	9	5,4641	5,8200
		25	5,1612	5,2122
		361	5,1266	5,1553
$-2 \leq u, v \leq 2$	29,7850	9	32,0000	33,7653
		49	29,9351	31,1036
		225	29,8226	29,9954
$-3,73 \leq u, v \leq 3,73$	170,0830	9	177,2216	185,3956
		25	171,2728	172,7543
		121	170,3831	170,8761
		3481	170,0951	170,1562

**Табела 5.3** Површине полиедара добијених различитим дискретизацијама дела хиперболичког параболоида.

Када упоредимо вредности из последње две колоне са површинама глатке површи, закључујемо да асимптотско–геодезијска мрежа даје бољу апроксимацију површине хиперболичког параболоида. ■

Дакле, геодезијска дискретизација омогућава прецизну апроксимацију глатке површи дискретном што се тиче њеног облика и површине. Ипак, ту су и неки недостаци: зависност дискретизације од топологије глатке површи (самопреклапање површи, могућа недефинисаност геодезијске криве у свакој тачки површи и слично), чињеница да примена геодезијске дискретизације подразумева добро познавање геометрије глатке површи и слично.



# Закључак

---

Дискретна геометрија је област мултидисциплинарног карактера у оквиру које су релативно скоро постигнути значајни резултати. Између осталих, апострофирали бисмо оне код којих је јасно уочљива аналогија са диференцијалном геометријом. Наш циљ је био да објаснимо ту аналогију проширивањем појмова диференцијалне геометрије на дискретну, а затим и да је продубимо увођењем нових појмова. Приступили смо том проблему тако што смо детаљно изложили сву потребну теорију из диференцијалне геометрије и систематизовали основне концепте дискретне геометрије, где су посебно место заузимале геодезијске криве, те потом прешли на главна разматрања.

$G$ -полиедри из главе 4, представљају аналогон глатких површи параметризованих геодезијским кривим, док насупротив самој параметризацији стоји процес геодезације који смо разматрали у случају  $G$ -мрежа. Други интересантан резултат везан за  $G$ -мреже је алгоритам за њихово генерисање утемељен на претходно установљеним особинама  $G$ -мрежа.

У зависности од потреба, користе се различите дискретизације глатких површи. У оквиру главе 5, разматрали смо дискретизацију генерисану геодезијским кривим глатких површи и као њену главну предност установили прецизну апроксимацију глатке површи дискретном, када је реч о њеној површини и запремини. Одредили смо неколико начина спровођења такве дискретизације, као и општи алгоритам за једну од њих (четвороугаоне мреже). Ипак, констатовали смо и неке недостатке геодезијске дискретизације.



# Литература

- [1] A. D. Aleksandrov, V. A. Zalgaller, *Intrinsic Geometry of Surfaces* volume 15 of *Translation of Mathematical Monographs*, AMS, (1967).
- [2] Н. Блажић, Н. Бојан, *Увод у диференцијалну геометрију*, Математички факултет, Београд, (1996).
- [3] A. Bobenko, U. Pincall, *Discretization of Surfaces and Integrable Systems*, Calarendon Press, Oxford, (1999).
- [4] M. P. D. Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice–Hall, (1976).
- [5] M. P. D. Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, Boston, (1992).
- [6] N. Christofides, *Graph Theory*, Academic Press, London, (1975).
- [7] B. P. Demidovich, I. A. Maron, *Computational Mathematics*, Mir Publishers, Moscow, (1987).
- [8] A. Gray, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, CRC Press, Boca Raton, (1997).
- [9] F. S. Hillier, G. J. Liberman, *Introduction to Operations Research*, Holden–Day, San Francisco, (1974).
- [10] Б. Јовановић, Д. Радунковић, *Нумеричка анализа*, Научна књига, Београд, (1993).
- [11] J. S. B. Mitchell, D. M. Mount, C. H. Papadimitriou, *The Discrete Geodesic Problem*, SIAM J. Comput., **16**(4) (647–668) (1987).
- [12] J. Ortega, W. Rheinboldt, *Iterative Solutions of Nonlinear Equarions in Several Variables*, Academic Press, New York, 1970.
- [13] A. V. Pogorelov, *Quasigeodesic Lines on a Convex Surface*, Amer. Math. Soc., **6**(72) (430–473) (1952).
- [14] K. Polthier and M. Schmies, *Geodesic Flow on Polyhedral Surfaces*, Data Visualization, Springer–Verlag, (1999).
- [15] K. Polthier and M. Schmies, *Straightest Geodesics on Polyhedral Surfaces*, Mathematical Visualization (135–150), Springer–Verlag, Heidelberg, (1998).
- [16] Д. Радунковић, *Нумеричке методе*, Грађевинска књига, Београд, (1991).
- [17] M. Sharir, A. Schorr, *On Shortest Paths in Polyhedral Space*, SIAM J. Comput., **15**(1) (193–215) 1986.
- [18] G. Strang, *Introduction to Applied Mathematics*, Wilesley–Cambridge Press, (1986).

- [19] Д. Вељан, *Комбинаторика с теоријом графова*, Школска књига, Загреб, (1989).
- [20] G. R. Walsh, *Methods of Optimization*, John Wiley and Sons, London, (1975).
- [21] A. T. White, *Graphs, Groups and Surfaces*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, (1973).