

# Racionalne krive i površi u geometrijskom dizajnu

Tijana Šukilović

Matematički fakultet,  
Univerzitet Beograd

May 2, 2011, Beograd

# Sadržaj

- 1 Racionalne Bézier-ove krive
  - Polinomijalne Bézier-ove krive
  - Algoritam de Casteljau
  - Multi-afine polarne forme
  - Podela Bézierove krive
  - Racionalne Bézier-ove krive i njihovi oskulirajući potprostori
  - Dualne Bézier-ove krive
- 2 B-Spline krive
  - Polinomijalne B-Spline krive
  - Racionalne B-Spline krive
- 3 Racionalne Bézier-ove površi
  - Tenzorski proizvod površi
  - Trougaone Bézier-ove površi
  - Multi-afine polarne forme
  - Racionalne površi



## Bernstein-ovi polinomi

*Racionalna kriva* je preslikavanje  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}^n$  koje u homogenim koordinatama ima polinomijalnu reprezentaciju.

Polinomi oblika

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad (i = 0, \dots, n) \quad (1)$$

nazivaju se *Bernstein-ovi polinomi stepena  $n$* .

Polinomi u Bernstein-ovoj formi prvobitno su korišćeni u dokazu teoreme Stone-Weierstrass-a o aproksimaciji.



# Bézierova kriva

## Definicija 1

Polinomijalna funkcija  $\mathbf{b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  koja predstavlja linearnu kombinaciju Bernstein-ovih polinoma:

$$\mathbf{b}(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \mathbf{b}_i \quad (2)$$

naziva se *Bézier-ova kriva*, a koeficijenti  $\mathbf{b}_i$  se zovu *kontrolne tačke*. Niz  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots$  predstavlja *kontrolni poligon* Bézier-ove krive.



## Lema 1

Bézier-ova kriva  $\mathbf{b}(t)$  definisana kontrolnim tačkama  $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n \in \mathbb{R}^m$  ima sledeća svojstva:

## Lema 1

Bézier-ova kriva  $\mathbf{b}(t)$  definisana kontrolnim tačkama  $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n \in \mathbb{R}^m$  ima sledeća svojstva:

- 1 Prvi izvod od  $\mathbf{b}(t)$  dat je formulom

$$\dot{\mathbf{b}}(t) = n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) \Delta \mathbf{b}_i,$$

gde je  $\Delta \mathbf{b}_i = \mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i$ , tako da  $i$  sam predstavlja Bézier-ovu krivu.

## Lema 1

Bézier-ova kriva  $\mathbf{b}(t)$  definisana kontrolnim tačkama  $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n \in \mathbb{R}^m$  ima sledeća svojstva:

- 1 Prvi izvod od  $\mathbf{b}(t)$  dat je formulom

$$\dot{\mathbf{b}}(t) = n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) \Delta \mathbf{b}_i,$$

gde je  $\Delta \mathbf{b}_i = \mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i$ , tako da  $i$  sam predstavlja Bézier-ovu krivu.

- 2 Važi  $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$  i tačka na krivoj  $\mathbf{b}(t)$  zavisi od kontrolnih tačaka na afino invarijantan način.

## Lema 1

Bézier-ova kriva  $\mathbf{b}(t)$  definisana kontrolnim tačkama  $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n \in \mathbb{R}^m$  ima sledeća svojstva:

- 1 Prvi izvod od  $\mathbf{b}(t)$  dat je formulom

$$\dot{\mathbf{b}}(t) = n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) \Delta \mathbf{b}_i,$$

gde je  $\Delta \mathbf{b}_i = \mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i$ , tako da  $i$  sam predstavlja Bézier-ovu krivu.

- 2 Važi  $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$  i tačka na krivoj  $\mathbf{b}(t)$  zavisi od kontrolnih tačaka na afino invarijantan način.
- 3 (*svojstvo konveksnog omotača*) Tačka  $\mathbf{b}(t)$  na krivoj je sadržana u konveksnom omotaču kontrolnih tačaka ako je  $0 \leq t \leq 1$ .





## Dokaz

$$\textcircled{1} (B_i^n)'(t) = n (B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t))$$

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{b}}(t) = n \sum_{i=1}^n (B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)) \mathbf{b}_i$$

$$= n \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) (\mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i)$$



## Dokaz

$$\textcircled{1} \quad (B_i^n)'(t) = n (B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t))$$

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{b}}(t) = n \sum_{i=1}^n (B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)) \mathbf{b}_i$$

$$= n \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) (\mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i)$$

$\textcircled{2}$   $\mathbf{b}(t)$  je afina kombinacija tačaka  $\mathbf{b}_i$ :

$$1 = (t + (1 - t))^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1 - t)^{n-i} = \sum_{i=0}^n B_i^n(t)$$



## Dokaz

$$\textcircled{1} \quad (B_i^n)'(t) = n (B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t))$$

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{b}}(t) = n \sum_{i=1}^n (B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)) \mathbf{b}_i$$

$$= n \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) (\mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i)$$

$\textcircled{2}$   $\mathbf{b}(t)$  je afina kombinacija tačaka  $\mathbf{b}_i$ :

$$1 = (t + (1 - t))^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1 - t)^{n-i} = \sum_{i=0}^n B_i^n(t)$$

$\textcircled{3}$   $0 \leq t \leq 1 \Rightarrow B_i^n(t) \geq 0$  (prema definiciji)

$\sum B_i^n(t) = 1 \Rightarrow B_i^n(t) \leq 1 \Rightarrow \mathbf{b}(t)$  je konveksna kombinacija tačaka  $\mathbf{b}_i$ .





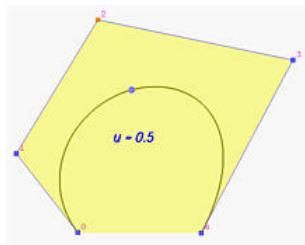
## Osnovna svojstva Bézier-ove krive

- Stepen krive definisane sa  $n + 1$  kontrolnih tačaka je  $n$



## Osnovna svojstva Bézier-ove krive

- Stepen krive definisane sa  $n + 1$  kontrolnih tačaka je  $n$
- Kriva  $\mathbf{b}(t)$  prolazi kroz tačke  $\mathbf{b}_0$  i  $\mathbf{b}_n$





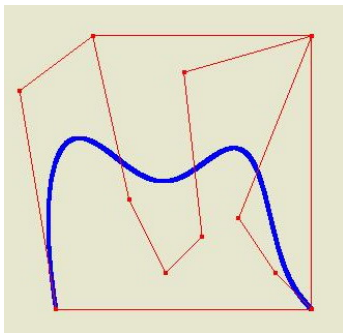
## Osnovna svojstva Bézier-ove krive

- Stepen krive definisane sa  $n + 1$  kontrolnih tačaka je  $n$
- Kriva  $\mathbf{b}(t)$  prolazi kroz tačke  $\mathbf{b}_0$  i  $\mathbf{b}_n$
- Nenegativnost – sve bazne funkcije su nenegativne



## Osnovna svojstva Bézier-ove krive

- Stepen krive definisane sa  $n + 1$  kontrolnih tačaka je  $n$
- Kriva  $\mathbf{b}(t)$  prolazi kroz tačke  $\mathbf{b}_0$  i  $\mathbf{b}_n$
- Nenegativnost
- Svojtvo konveksnog omotača

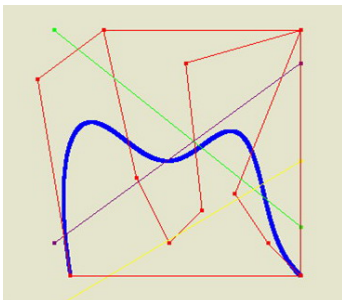


*Specijalno:* Bézier-ova kriva je konveksna ako je njen kontrolni poligon konveksan.



## Osnovna svojstva Bézier-ove krive

- Stepen krive definisane sa  $n + 1$  kontrolnih tačaka je  $n$
- Kriva  $\mathbf{b}(t)$  prolazi kroz tačke  $\mathbf{b}_0$  i  $\mathbf{b}_n$
- Nenegativnost
- Svojtvo konveksnog omotača
- Svojtvo umanjene varijacije – *Hiperravan  $H$  seče polinomijalnu Bézier-ovu krivu (koja nije sadržana u  $H$ ) u najviše onoliko tačaka u koliko seče njen kontrolni poligon:*

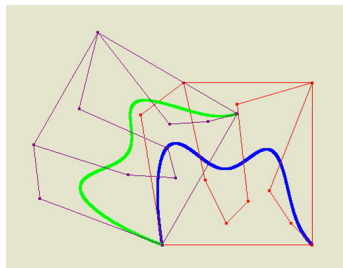






## Osnovna svojstva Bézier-ove krive

- Stepen krive definisane sa  $n + 1$  kontrolnih tačaka je  $n$
- Kriva  $\mathbf{b}(t)$  prolazi kroz tačke  $\mathbf{b}_0$  i  $\mathbf{b}_n$
- Nenegativnost
- Svojstvo konveksnog omotača
- Svojstvo umanjene varijacije
- Afina invarijantnost



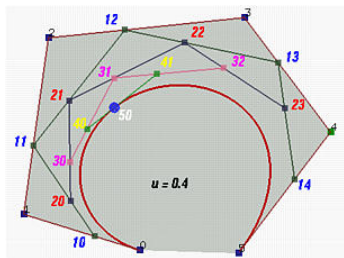




# Algoritam za određivanje tačke na krivoj

Dat je niz kontrolnih tačaka  $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n$  i realni parametar  $t \in [0, 1]$ . Tačku  $\mathbf{b}(t)$  krive konstruišemo rekurzivnim postupkom pod nazivom *de Casteljau-ov algoritam*:

- 1** Početna iteracija:  $\mathbf{b}_i^0 = \mathbf{b}_i, \dots, \mathbf{b}_i^0 = \mathbf{b}_i$
- 2**  $\mathbf{b}_i^r = (1 - t)\mathbf{b}_i^{r-1} + t\mathbf{b}_{i+1}^{r-1} \quad \begin{cases} r = 1, \dots, n \\ i = 0, \dots, n - r \end{cases}$
- 3**  $\mathbf{b}(t) = \mathbf{b}_0^n$





## Lema 2

Algoritam *de Casteljau-a*, primenjen na tačke  $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n$  i realni parametar  $t$ , izračunava polinomijalnu Bézier-ovu krivu sa ovim kontrolnim tačkama i za vrednost parametra  $t$ .

## Lema 2

Algoritam *de Casteljau-a*, primenjen na tačke  $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n$  i realni parametar  $t$ , izračunava polinomijalnu Bézier-ovu krivu sa ovim kontrolnim tačkama i za vrednost parametra  $t$ .

## Dokaz

Pokažimo prvo da izračunavanje Bézier-ove krive sa kontrolnim tačkama  $\mathbf{b}_i, \dots, \mathbf{b}_{i+r}$  za vrednost  $t$  daje tačku  $\mathbf{b}_i^r$  iz algoritma:

$$(1-t) \sum_{j=0}^{r-1} B_j^{r-1}(t) \mathbf{b}_{i+j} + t \sum_{j=0}^{r-1} B_j^{r-1}(t) \mathbf{b}_{i+1+j} = \sum_{j=0}^r B_j^r(t) \mathbf{b}_{i+j}$$

Tvrđenje leme je specijalan slučaj ovoga za  $i = 0$  i  $r = n$ .  $\square$



# Veza izmedju Bézier-ovih i polinomijalnih krivih



# Veza izmedju Bézier-ovih i polinomijalnih krivih

Sve Bézier-ove krive su polinomijalne.



## Veza izmedju Bézier-ovih i polinomijalnih krivih

Sve Bézier-ove krive su polinomijalne.

Sve polinomijalne krive su Bézier-ove.





## Veza između Bézier-ovih i polinomijalnih krivih

Sve Bézier-ove krive su polinomijalne.

Sve polinomijalne krive su Bézier-ove.

Za datu polinomijalnu funkciju  $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  stepena  $\leq n$  treba odrediti tačke  $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n$  za koje važi  $c(t) = \sum_i B_i^n(t) \mathbf{b}_i$ .



## Veza između Bézier-ovih i polinomijalnih krivih

Sve Bézier-ove krive su polinomijalne.

Sve polinomijalne krive su Bézier-ove.

Za datu polinomijalnu funkciju  $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  stepena  $\leq n$  treba odrediti tačke  $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n$  za koje važi  $c(t) = \sum_i B_i^n(t) \mathbf{b}_i$ .

### Definicija

Posmatramo monom  $t^r$ . Za  $n \geq r$  definišemo funkciju  $n$ -promenljivih  $P$ :

$$P(t_1, \dots, t_n) = \binom{n}{r}^{-1} \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ \#I = r}} \prod_{i \in I} t_i$$



## Primeri



## Primeri

$$n = 2, r = 0 : P(t_1, t_2) = 1$$



## Primeri

$$n = 2, r = 0 : P(t_1, t_2) = 1$$

$$n = 2, r = 1 : P(t_1, t_2) = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

## Primeri

$$n = 2, r = 0 : P(t_1, t_2) = 1$$

$$n = 2, r = 1 : P(t_1, t_2) = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

$$n = 2, r = 2 : P(t_1, t_2) = t_1 t_2$$



## Primeri

$$n = 2, r = 0 : P(t_1, t_2) = 1$$

$$n = 2, r = 1 : P(t_1, t_2) = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

$$n = 2, r = 2 : P(t_1, t_2) = t_1 t_2$$

$$n = 3, r = 0 : P(t_1, t_2, t_3) = 1$$



## Primeri

$$n = 2, r = 0 : P(t_1, t_2) = 1$$

$$n = 2, r = 1 : P(t_1, t_2) = \frac{t_1+t_2}{2}$$

$$n = 2, r = 2 : P(t_1, t_2) = t_1 t_2$$

$$n = 3, r = 0 : P(t_1, t_2, t_3) = 1$$

$$n = 3, r = 1 : P(t_1, t_2, t_3) = \frac{t_1+t_2+t_3}{3}$$





## Primeri

$$n = 2, r = 0 : P(t_1, t_2) = 1$$

$$n = 2, r = 1 : P(t_1, t_2) = \frac{t_1+t_2}{2}$$

$$n = 2, r = 2 : P(t_1, t_2) = t_1 t_2$$

$$n = 3, r = 0 : P(t_1, t_2, t_3) = 1$$

$$n = 3, r = 1 : P(t_1, t_2, t_3) = \frac{t_1+t_2+t_3}{3}$$

$$n = 3, r = 2 : P(t_1, t_2, t_3) = \frac{t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3}{3}$$



## Primeri

$$n = 2, r = 0 : P(t_1, t_2) = 1$$

$$n = 2, r = 1 : P(t_1, t_2) = \frac{t_1+t_2}{2}$$

$$n = 2, r = 2 : P(t_1, t_2) = t_1 t_2$$

$$n = 3, r = 0 : P(t_1, t_2, t_3) = 1$$

$$n = 3, r = 1 : P(t_1, t_2, t_3) = \frac{t_1+t_2+t_3}{3}$$

$$n = 3, r = 2 : P(t_1, t_2, t_3) = \frac{t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3}{3}$$

$$n = 3, r = 3 : P(t_1, t_2, t_3) = t_1 t_2 t_3$$

## Multi-afine polarne forme

### Definicija 2

Preslikavanje  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  naziva se *afino* ako

$f(t\mathbf{a} + (1-t)\mathbf{b}) = tf(\mathbf{a}) + (1-t)f(\mathbf{b})$  za sve  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

## Multi-afine polarne forme

### Definicija 2

Preslikavanje  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  naziva se *afino* ako

$$f(t\mathbf{a} + (1-t)\mathbf{b}) = tf(\mathbf{a}) + (1-t)f(\mathbf{b}) \text{ za sve } \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}.$$

### Definicija 3

Preslikavanje  $P$  naziva se *multi-afina polarna forma* odgovarajućeg monoma.

Ako je polinom linearna kombinacija monoma, odgovarajuća linearna kombinacija polarnih formi monoma naziva se *polarna forma polinoma*.



## Teorema 1

Ako je  $c(t) = \sum c_i t^i$  realna polinomijalna funkcija stepena  $\leq n$ , tada se može predstaviti u obliku  $c(t) = \sum_i B_i^n(t) \mathbf{b}_i$ , gde je

$$\mathbf{b}_i = P(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-i}, \underbrace{1, \dots, 1}_i),$$

gde je  $P$  polarna forma  $n$ -promenljivih funkcije  $c$ .

## Dokaz

Multi-afina funkcija  $P$  zadovoljava jednakost:

$$(1-t_n)P(t_1, \dots, t_{n-1}, 0) + t_n P(t_1, \dots, t_{n-1}, 1) = P(t_1, \dots, t_{n-1}, t_n)$$

Definišemo tačke:

$$\mathbf{p}_i^r := P(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-r-i}, \underbrace{1, \dots, 1}_i, \underbrace{t, \dots, t}_r)$$

One zadovoljavaju iste rekurentne jednačine kao tačke  $\mathbf{b}_i^r$  iz de Casteljaou-ovog algoritma

$$\Rightarrow \mathbf{p}_i^r = \mathbf{b}_i^r \Rightarrow \mathbf{p}_0^n = \mathbf{b}_0^n$$

Tvrđenje teoreme sledi iz *Leme 2*. □



## Primer

Posmatramo krivu  $c(t) = (t^2 - 1, 2t)$ .

Odgovarajuće 2-polarne forme monoma su:

$$\begin{aligned} 1 & : 1 \\ t & : \frac{t_1+t_2}{2} \\ t^2 & : t_1t_2 \end{aligned}$$

Polarna forma od  $c$  data je sa:

$$P(t_1, t_2) = (t_1t_2 - 1, t_1 + t_2),$$

a kontrolne tačke:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_0 & = P(0, 0) = (-1, 0) \\ \mathbf{b}_1 & = P(0, 1) = (-1, 1) \\ \mathbf{b}_2 & = P(1, 1) = (0, 2) \end{aligned}$$

### Lema 3

Neka je  $p(u)$  polinomijalna funkcija stepena  $\leq n$  i  $Q(u_1, \dots, u_n)$  simetrična multi-afina realna funkcija  $n$  promenljivih takva da je  $Q(u, \dots, u) = p(u)$ , tada se  $Q$  poklapa sa  $n$ -polarnom formom  $P$  od  $p$ .

### Lema 4

Dve polinomijalne krive  $f, g$  sa multi-afinim polarnim formama  $S$  i  $T$  dele iste izvode najviše reda  $k$  u  $u = u_0$  akko

$$S(u_1, \dots, u_k, \underbrace{u_0, \dots, u_0}_{n-k}) = T(u_1, \dots, u_k, \underbrace{u_0, \dots, u_0}_{n-k})$$

za sve  $u_1, \dots, u_k$ .



## Reparametrizacija Bézierove krive

Svaki deo Bézierove krive može biti reparametrizovan tako da predstavlja polinomijalni segment krive čiji parametar pripada intervalu  $[0, 1]$ .

### Posledica 1

Neka je  $c(t)$  polinomijalna kriva stepena  $\leq n$  u  $\mathbb{R}^m$  i  $P$  njena  $n$ -polarna forma, tada su kontrolne tačke segmenta krive  $c([a, b])$  date sa

$$\mathbf{b}_i = P(\underbrace{a, \dots, a}_{n-i}, \underbrace{b, \dots, b}_i).$$

## Dokaz

$$d(t) := c \left( \frac{t - a}{b - a} \right) \Rightarrow d([0, 1]) = c([a, b])$$

Za ovako definisanu funkciju  $d$  polarna forma  $Q$  zadovoljava jednakost:

$$Q(t_1, \dots, t_n) = P \left( \frac{t_1 - a}{b - a}, \dots, \frac{t_n - a}{b - a} \right)$$

Iz *Teoreme 1* sledi:

$$\mathbf{b}_i = P(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-i}, \underbrace{1, \dots, 1}_i) = Q(\underbrace{a, \dots, a}_{n-i}, \underbrace{b, \dots, b}_i)$$





## Posledica 2

Neka je  $\mathbf{b}$  Bézier-ova kriva sa kontrolnim tačkama  $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n$ . Tangenta na krivu u tački  $\mathbf{b}(t)$  razapeta je tačkama  $\mathbf{b}_0^{n-1}$  i  $\mathbf{b}_1^{n-1}$  koje se dobijaju primenom de Casteljau-ovog algoritma.

## Dokaz

Označimo sa  $l$  tangentu na krivu u tački  $\mathbf{b}(t)$ .

Posmatramo segment krive  $\mathbf{b}([0, t])$ . Iz *Teoreme 1* i *Posledice 2* sledi da su njene kontrolne tačke  $\mathbf{b}_0^0, \dots, \mathbf{b}_0^n$ .

$$\dot{\mathbf{b}}(t) = n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) \Delta \mathbf{b}_i \Rightarrow \mathbf{b}_0^{n-1} \in l$$

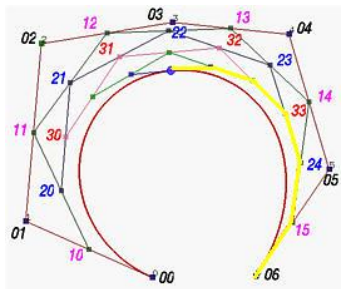
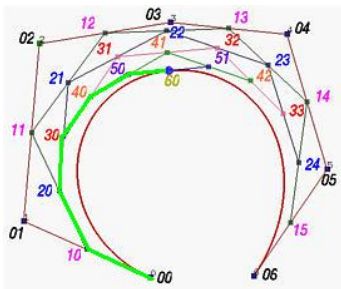
Za tačku  $\mathbf{b}_1^{n-1}$  primenimo prethodni postupak na  $\mathbf{b}([t, 1])$





## Podela krive na 2 dela

Za dati skup  $n + 1$  kontrolnih tačaka  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$  i parametar  $t \in [0, 1]$ , tražimo dva skupa sa  $n + 1$  kontrolnih tačaka  $Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  i  $R_0, R_1, R_2, \dots, R_n$  takvih da Bézier-ova kriva definisana pomoću  $Q_i$  (odnosno  $R_i$ ) je deo početne Bézier-ove krive na  $[0, t]$  (odnosno  $[t, 1]$ ).

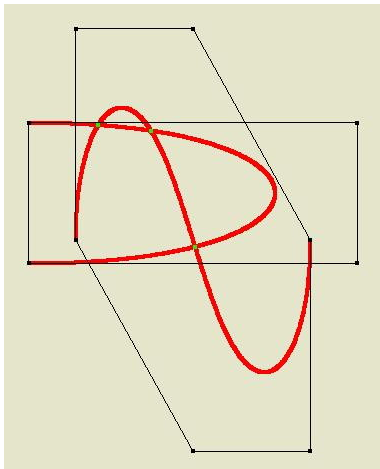


## Primena podele krive

- Odredjivanje preseka dve Bézier-ove krive

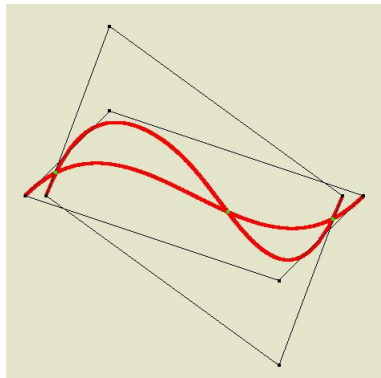
## Primena podele krive

- Odredjivanje preseka dve Bézier-ove krive



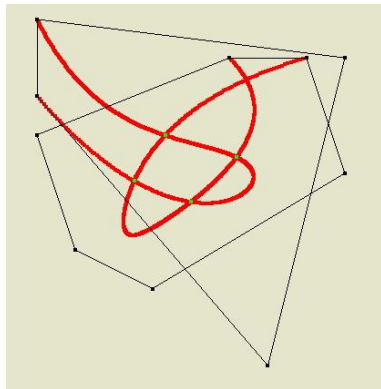
## Primena podele krive

- Odredjivanje preseka dve Bézier-ove krive



## Primena podele krive

- Odredjivanje preseka dve Bézier-ove krive



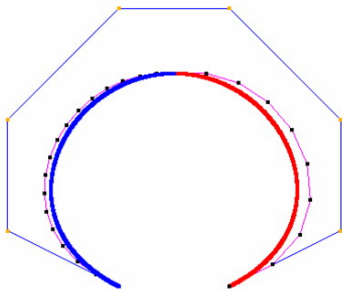


## Primena podele krive

- Odredjivanje preseka dve Bézier-ove krive
- Renderovanje Bézier-ove krive

## Primena podele krive

- Odredjivanje preseka dve Bézier-ove krive
- Renderovanje Bézier-ove krive
- Dizajn krivih



Data kriva 8. stepena podeljena je na dva dela – prvom je stepen povećan za 10, a drugom za 2.



## Povećavanje stepena krive

*Zadatak:* Povećati stepen krive bez promene njenog oblika.



## Povećavanje stepena krive

*Zadatak:* Povećati stepen krive bez promene njenog oblika.

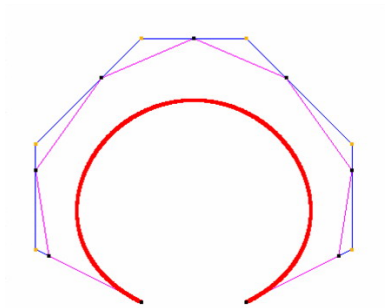
*Rešenje:* Nove kontrolne tačke se računaju pomoću formule:

$$Q_i = \frac{i}{n+1} P_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) P_i \quad (1 \leq i \leq n),$$

gde su  $P_0, \dots, P_n$  kontrolne tačke početne krive.

## Povećavanje stepena krive

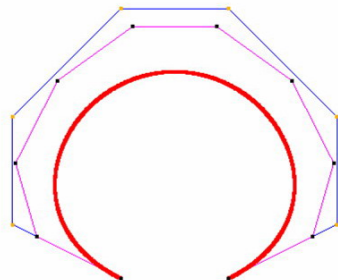
*Zadatak:* Povećati stepen krive bez promene njenog oblika.



Povećanje za 1 stepen

## Povećavanje stepena krive

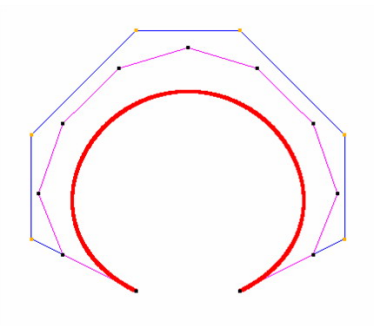
*Zadatak:* Povećati stepen krive bez promene njenog oblika.



Povećanje za 2 stepena

## Povećavanje stepena krive

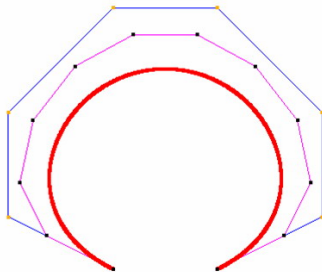
*Zadatak:* Povećati stepen krive bez promene njenog oblika.



Povećanje za 3 stepena

## Povećavanje stepena krive

*Zadatak:* Povećati stepen krive bez promene njenog oblika.

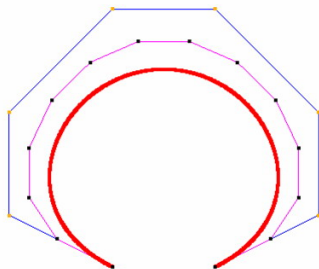


Povećanje za 4 stepena



## Povećavanje stepena krive

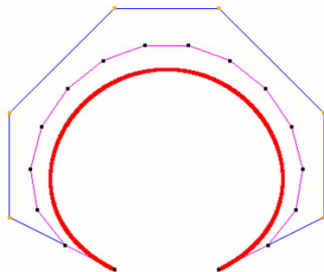
*Zadatak:* Povećati stepen krive bez promene njenog oblika.



Povećanje za 6 stepeni

## Povećavanje stepena krive

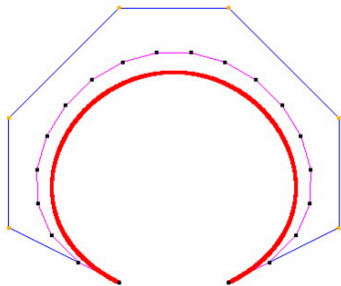
*Zadatak:* Povećati stepen krive bez promene njenog oblika.



Povećanje za 8 stepeni

## Povećavanje stepena krive

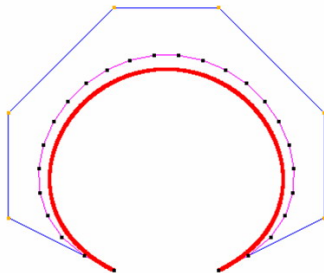
*Zadatak:* Povećati stepen krive bez promene njenog oblika.



Povećanje za 12 stepeni

## Povećavanje stepena krive

*Zadatak:* Povećati stepen krive bez promene njenog oblika.

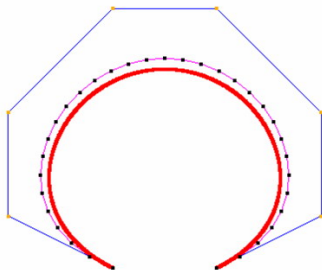


Povećanje za 18 stepeni



## Povećavanje stepena krive

*Zadatak:* Povećati stepen krive bez promene njenog oblika.



Povećanje za 25 stepeni

## Racionalne Bézier-ove krive

### Definicija 4

Bézier-ova kriva  $c : \mathbb{R} \rightarrow P^m$  data sa

$$c(t) = c(t)\mathbb{R} = \left( \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \mathbf{b}_i \right) \mathbb{R}, \quad (\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^{m+1}) \quad (3)$$

naziva sa *racionalna Bézier-ova kriva*.

## Racionalne Bézier-ove krive

### Definicija 4

Bézier-ova kriva  $c : \mathbb{R} \rightarrow P^m$  data sa

$$c(t) = c(t)\mathbb{R} = \left( \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \mathbf{b}_i \right) \mathbb{R}, \quad (\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^{m+1}) \quad (3)$$

naziva sa *racionalna Bézier-ova kriva*.

**Sve racionalne krive mogu se napisati kao Bézier-ove krive.**

## Oskulirajući potprostori

### Teorema 2

$k$ -ti projektivni oskulirajući potprostor racionalne Bézier-ove krive

$c(t) = (\sum_i B_i^n(t) \mathbf{b}_i) \mathbb{R}$  u  $t = 0$  je  $\mathbf{b}_0 \mathbb{R} \vee \dots \vee \mathbf{b}_k \mathbb{R}$ .

Slično,  $k$ -ti oskulirajući potprostor u  $t = 1$  dat je sa

$\mathbf{b}_n \mathbb{R} \vee \dots \vee \mathbf{b}_{n-k} \mathbb{R}$ .

### Dokaz

Razmotrimo slučaj za  $t = 0$  ( $t = 1$  se razmatra analogno).

Prema definiciji,  $k$ -ti oskulirajući potprostor razapet je tačkama:

$c(0) \mathbb{R}, \dot{c}(0) \mathbb{R}, \dots, c^{(k)}(0) \mathbb{R}$ .

Kako je  $c^{(r)}(0)$  linearne kombinacija vektora  $\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_r - \mathbf{b}_0$  (sa nenula koeficijentom uz  $\mathbf{b}_r - \mathbf{b}_0$ ), dobijamo da  $\mathbf{b}_0 \mathbb{R} \vee \dots \vee \mathbf{b}_k \mathbb{R}$  jeste  $k$ -ti oskulirajući potprostor. □



## Primer

Posmatramo semikubikalnu parabolu  $t \mapsto (t^2, t^3)$ .

Posle reparametrizacije  $t = \frac{u}{u-1}$ , u homogenim koordinatama je možemo zapisati kao

$$u \mapsto ((u-1)^3, u^2(u-1), u^3)\mathbb{R} = (u^3 - 3u^2 + 3u - 1, u^3 - u^2, u^3)\mathbb{R}.$$

Polarna forma je oblika:

$$P(u_1, u_2, u_3) = \frac{(u_1 u_2 u_3 - (u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3) + (u_1 + u_2 + u_3) - 1, u_1 u_2 u_3 - \frac{u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3}{3}, u_1 u_2 u_3)}{u_1 u_2 u_3 - (u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3) + (u_1 + u_2 + u_3) - 1}$$



## Primer (nastavak)

Kontrolne tačke  $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3$ :

$$\mathbf{b}_0 = P(0, 0, 0) = (-1, 0, 0)$$

$$\mathbf{b}_1 = P(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\mathbf{b}_2 = P(0, 1, 1) = \left(0, -\frac{1}{3}, 0\right)$$

$$\mathbf{b}_3 = P(1, 1, 1) = (0, 0, 1)$$

Oдавде sledi da je za  $u = 0$  niz dimenzija oskulirajućih potprostora  $0, 0, 1, 2, \dots$ , što znači da ovde kriva ima singularitet.

U beskonačnosti (za  $u = 1$ ), oskulirujući potprostori su dimenzija  $0, 1, 1, 2, \dots$ , pa kriva ima prevojnu tačku za  $u = 1$ .

## Racionalne normalne krive

### Lema 5

Za racionalnu krivu  $c(u) = c(u)\mathbb{R}$  stepena  $k$  u  $P^n$  ( $k > n$ ) postoji singularno projektivno preslikavanje  $\pi : P^k \rightarrow P^n$  takvo da je  $c(u) = ((1, u, \dots, u^k)\mathbb{R})\pi$ .

### Definicija 5

Kriva koja, u odnosu na neki projektivni koordinatni sistem, ima parametrizaciju  $c(u) = (1, u, u^2, \dots, u^k)\mathbb{R}$  naziva se *racionalna normalna kriva* projektivnog  $k$ -prostora.

## Dualne Bézier-ove krive

### Definicija 6

*Tangenta* na racionalnu ravnsku krivu  $c(t) = c(t)\mathbb{R}$  u tački  $t = t_0$  je linija  $c(t_0) \vee c^1(t_0)$  i ima vektor homogenih koordinata  $\mathbb{R}u(t_0) = \mathbb{R}(c(t_0) \times \dot{c}(t_0))$ .

*Dualna Bézier-ova kriva*

$$U(t) = \mathbb{R}u(t) = \mathbb{R} \sum_{i=0}^m B_i^m(t) u_i$$

je familija pravih (tangenti) u projektivnoj ravni zadatih polinomijalnom reprezentacijom u Bernstein-ovoj bazi.

## Dualne Bézier-ove krive

### Definicija 6

*Tangenta* na racionalnu ravansku krivu  $c(t) = c(t)\mathbb{R}$  u tački  $t = t_0$  je linija  $c(t_0) \vee c^1(t_0)$  i ima vektor homogenih koordinata  $\mathbb{R}u(t_0) = \mathbb{R}(c(t_0) \times \dot{c}(t_0))$ .

*Dualna Bézier-ova kriva*

$$U(t) = \mathbb{R}u(t) = \mathbb{R} \sum_{i=0}^m B_i^m(t) u_i$$

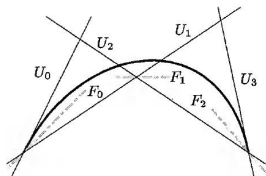
je familija pravih (tangenti) u projektivnoj ravni zadatih polinomijalnom reprezentacijom u Bernstein-ovoj bazi.

### Teorema 3

Familija tangenti racionalne Bézier-ove krive je njena dualna Bézier-ova kriva, i obratno.

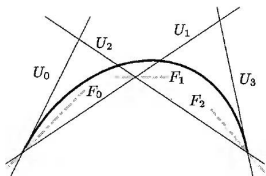


## Dualne kontrolne strukture





## Dualne kontrolne strukture



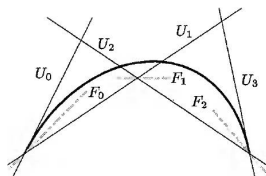
*Bézier-ove krive:*

$B_i = \mathbf{b}_i \mathbb{R}$  – kontrolne tačke

$F_i = (\mathbf{b}_i + \mathbf{b}_{i+1}) \mathbb{R}$  – granične tačke



## Dualne kontrolne strukture



*Bézier-ove krive:*

$B_i = \mathbf{b}_i \mathbb{R}$  – kontrolne tačke

$F_i = (\mathbf{b}_i + \mathbf{b}_{i+1}) \mathbb{R}$  – granične tačke

*Dualne Bézier-ove krive:*

$U_i = \mathbb{R}u_i$  – Bézier-ove linije

$F_i : f_i = u_i + u_{i+1}$  – granične linije

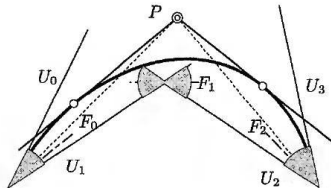




## Svojstvo umanjene varijacije

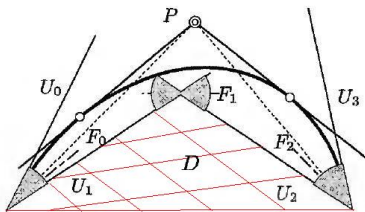
### Teorema 4

Ako je  $c$  ravanska Bézier-ova kriva, broj njenih tangenti incidentnih sa datom tačkom  $P$  nije veći od ukupnog broja dualnih kontrolnih struktura koje su incidentne sa  $P$ .





## Svojstvo konveksnosti



### Posledica

Ako se Bézier-ove linije  $U_i$  i granične linije  $F_i$  dualne Bézier-ove krive  $c$  nalaze u skupu ivica i potpornih linija konveksnog domena  $D$ , a tačke  $U_i \cap U_{i+1}$  su medju temenima  $D$ -a, tada je  $c$  konveksna i potpuno leži izvan  $D$ .



## Izračunavanje dualnih krivih

Za izračunavanje polinoma  $U(t) = \mathbb{R}u(t) = \mathbb{R} \sum_{i=0}^m B_i^m(t)u_i$ , koristi se de Casteljau-ov algoritam:

## Izračunavanje dualnih krivih

Za izračunavanje polinoma  $U(t) = \mathbb{R}u(t) = \mathbb{R} \sum_{i=0}^m B_i^m(t)u_i$ , koristi se de Casteljau-ov algoritam:

- 1 stavimo:  $u_i^0 = u_i, i = 0, \dots, m$

## Izračunavanje dualnih krivih

Za izračunavanje polinoma  $U(t) = \mathbb{R}u(t) = \mathbb{R} \sum_{i=0}^m B_i^m(t)u_i$ , koristi se de Casteljau-ov algoritam:

- 1 stavimo:  $u_i^0 = u_i$ ,  $i = 0, \dots, m$
- 2 rekurzivno definišemo linije  $U_i^k(t) = \mathbb{R}u_i^k(t)$  :

$$u_i^k(t) = (1 - t)u_i^{k-1}(t) + tu_{i+1}^{k-1}(t)$$

## Izračunavanje dualnih krivih

Za izračunavanje polinoma  $U(t) = \mathbb{R}u(t) = \mathbb{R} \sum_{i=0}^m B_i^m(t) u_i$ , koristi se de Casteljau-ov algoritam:

- stavimo:  $u_i^0 = u_i, i = 0, \dots, m$
- rekurzivno definišemo linije  $U_i^k(t) = \mathbb{R}u_i^k(t)$  :

$$u_i^k(t) = (1 - t)u_i^{k-1}(t) + tu_{i+1}^{k-1}(t)$$

- $U(t) = \mathbb{R}u_0^m(t)$

## Konverzija dualnih krivih

### Posledica

Ako je  $U(t) = \mathbb{R} \sum_{i=0}^m B_i^m(t) u_i$  dualna Bézier-ova kriva, tada je odgovarajuća tačka krive  $c(t)$  parametrizovana sa

$$c(t) = c(t) \mathbb{R} \left( \sum_{k=0}^{2m-2} B_k^{2m-2}(t) \mathbf{b}_k \right) \mathbb{R}$$

$$\binom{2m-2}{k} \mathbf{b}_k = \sum_{i+j=k} \binom{m-1}{i} \binom{m-1}{j} (u_i \times u_{j+1})$$

## B-Spline bazne funkcije

### Definicija 7

Uredjena lista  $T$  realnih brojeva  $t_0 \leq t_1 \leq \dots, t_i < t_{i+n+1}$  naziva se *vektor čvorova*.

Funkcija  $N_i^n(u)$  definisana rekurzivno:

$$N_i^0(u) := \begin{cases} 1 & \text{za } t_i \leq u < t_{i+1} \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

$$N_i^r(u) := \frac{u - t_i}{t_{i+r} - t_i} N_i^{r-1}(u) + \frac{t_{i+r+1} - u}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} N_{i+1}^{r-1}(u)$$

za  $1 \leq r \leq n$ , naziva se  *$i$ -ta B-Spline bazna funkcija* stepena  $n$  koja odgovara vektoru čvorova  $T$ .



## B-Spline kriva

### Definicija 8

Ako je  $n$  pozitivan ceo broj,  $\mathbf{d}_0, \dots, \mathbf{d}_m$  tačke u  $\mathbb{R}^d$ , a  $T = (t_0 \leq \dots \leq t_{m+n+1})$  vektor čvorova, onda su *B-Spline kriva*  $s(u)$  stepena  $n$  sa kontrolnim tačkama  $\mathbf{d}_0, \dots, \mathbf{d}_m$  i vektorom čvorova  $T$  i njena pridružena polarna forma  $S_j$  definisane sa

$$s(u) = \sum_{i=0}^m N_i^n(u) \mathbf{d}_i, \quad S_j(u_1, \dots, u_n) = \sum_{i=0}^m P_{i,j}^n(u_1, \dots, u_n) \mathbf{d}_i,$$

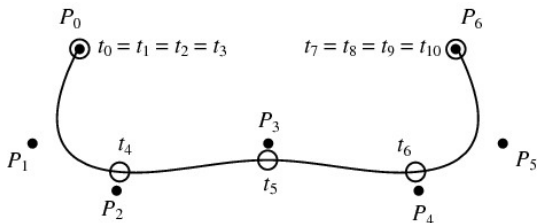
gde su funkcije  $P_{i,j}^n(u_1, \dots, u_n)$  date rekurzijom ( $1 \leq r \leq n$ ):

$$P_{i,j}^0() = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$P_{i,j}^r(u_1, \dots, u_r) = \frac{u_r - t_i}{t_{i+r} - t_i} P_{i,j}^{r-1}(u_1, \dots, u_{r-1}) + \frac{t_{i+r+1} - u_r}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} P_{i+1,j}^{r-1}(u_1, \dots, u_{r-1})$$



## Primer



B-Spline kriva nad vektorom čvorova  $(0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 4)$ .



## Teorema 5

Fiksirajmo stepen  $n$ , odgovarajući vektor čvorova

$T = (t_0 \leq \dots \leq t_{m+n+1})$  i kontrolne tačke  $\mathbf{d}_0, \dots, \mathbf{d}_m$ . Tada B-Spline bazne funkcije  $N_i^n(u)$  i B-Spline kriva  $s(u)$ , definisane pomoću ovih podataka, imaju sledeća svojstva:



## Teorema 5

Fiksirajmo stepen  $n$ , odgovarajući vektor čvorova

$T = (t_0 \leq \dots \leq t_{m+n+1})$  i kontrolne tačke  $\mathbf{d}_0, \dots, \mathbf{d}_m$ . Tada

B-Spline bazne funkcije  $N_i^n(u)$  i B-Spline kriva  $s(u)$ , definisane

pomoću ovih podataka, imaju sledeća svojstva:

- $N_i^n(u) \geq 0$  i  $\sum_{i=1}^m N_i^n(u) = 1$ ;  $N_i^n(u) = 0$  ako  $u \notin [t_i, t_{i+n+1}]$ .

## Teorema 5

Fiksirajmo stepen  $n$ , odgovarajući vektor čvorova

$T = (t_0 \leq \dots \leq t_{m+n+1})$  i kontrolne tačke  $\mathbf{d}_0, \dots, \mathbf{d}_m$ . Tada B-Spline bazne funkcije  $N_i^n(u)$  i B-Spline kriva  $s(u)$ , definisane pomoću ovih podataka, imaju sledeća svojstva:

- $N_i^n(u) \geq 0$  i  $\sum_{i=1}^m N_i^n(u) = 1$ ;  $N_i^n(u) = 0$  ako  $u \notin [t_i, t_{i+n+1}]$ .
- Tačka na krivoj  $s(u)$  zavisi samo od  $\mathbf{d}_{i-n}, \dots, \mathbf{d}_i$  ako  $u \in [t_i, t_{i+n+1}]$  i ova zavisnost je afino invarijantna.

## Teorema 5

Fiksirajmo stepen  $n$ , odgovarajući vektor čvorova

$T = (t_0 \leq \dots \leq t_{m+n+1})$  i kontrolne tačke  $\mathbf{d}_0, \dots, \mathbf{d}_m$ . Tada

B-Spline bazne funkcije  $N_i^n(u)$  i B-Spline kriva  $s(u)$ , definisane pomoću ovih podataka, imaju sledeća svojstva:

- $N_i^n(u) \geq 0$  i  $\sum_{i=1}^m N_i^n(u) = 1$ ;  $N_i^n(u) = 0$  ako  $u \notin [t_i, t_{i+n+1}]$ .
- Tačka na krivoj  $s(u)$  zavisi samo od  $\mathbf{d}_{i-n}, \dots, \mathbf{d}_i$  ako  $u \in [t_i, t_{i+n+1}]$  i ova zavisnost je afino invarijantna.
- Tačka na krivoj  $s(u)$  sadržana je u konveksnom omotaču tačaka  $\mathbf{d}_{i-n}, \dots, \mathbf{d}_i$  ako  $u \in [t_i, t_{i+n+1}]$ .

## Teorema 5

Fiksirajmo stepen  $n$ , odgovarajući vektor čvorova

$T = (t_0 \leq \dots \leq t_{m+n+1})$  i kontrolne tačke  $\mathbf{d}_0, \dots, \mathbf{d}_m$ . Tada B-Spline bazne funkcije  $N_i^n(u)$  i B-Spline kriva  $s(u)$ , definisane pomoću ovih podataka, imaju sledeća svojstva:

- $N_i^n(u) \geq 0$  i  $\sum_{i=1}^m N_i^n(u) = 1$ ;  $N_i^n(u) = 0$  ako  $u \notin [t_i, t_{i+n+1}]$ .
- Tačka na krivoj  $s(u)$  zavisi samo od  $\mathbf{d}_{i-n}, \dots, \mathbf{d}_i$  ako  $u \in [t_i, t_{i+n+1}]$  i ova zavisnost je fino invarijantna.
- Tačka na krivoj  $s(u)$  sadržana je u konveksnom omotaču tačaka  $\mathbf{d}_{i-n}, \dots, \mathbf{d}_i$  ako  $u \in [t_i, t_{i+n+1}]$ .
- Restrikcija B-Spline baznih funkcija  $N_i^n$  na proizvoljni interval  $[t_j, t_{j+1}]$  je polinom čija je multi-afina polarna forma  $P_{i,j}^n(u_1, \dots, u_n)$ .

## Teorema 5

Fiksirajmo stepen  $n$ , odgovarajući vektor čvorova  $T = (t_0 \leq \dots \leq t_{m+n+1})$  i kontrolne tačke  $\mathbf{d}_0, \dots, \mathbf{d}_m$ . Tada B-Spline bazne funkcije  $N_i^n(u)$  i B-Spline kriva  $s(u)$ , definisane pomoću ovih podataka, imaju sledeća svojstva:

- $N_i^n(u) \geq 0$  i  $\sum_{i=1}^m N_i^n(u) = 1$ ;  $N_i^n(u) = 0$  ako  $u \notin [t_i, t_{i+n+1}]$ .
- Tačka na krivoj  $s(u)$  zavisi samo od  $\mathbf{d}_{i-n}, \dots, \mathbf{d}_i$  ako  $u \in [t_i, t_{i+n+1}]$  i ova zavisnost je afino invarijantna.
- Tačka na krivoj  $s(u)$  sadržana je u konveksnom omotaču tačaka  $\mathbf{d}_{i-n}, \dots, \mathbf{d}_i$  ako  $u \in [t_i, t_{i+n+1}]$ .
- Restrikcija B-Spline baznih funkcija  $N_i^n$  na proizvoljni interval  $[t_j, t_{j+1}]$  je polinom čija je multi-afina polarna forma  $P_{i,j}^n(u_1, \dots, u_n)$ .
- Restrikcija krive  $s$  na proizvoljni interval  $[t_j, t_{j+1}]$  je polinom čija je multi-afina polarna forma  $S_j(u_1, \dots, u_n)$ .



## Teorema 5

Fiksirajmo stepen  $n$ , odgovarajući vektor čvorova  $T = (t_0 \leq \dots \leq t_{m+n+1})$  i kontrolne tačke  $\mathbf{d}_0, \dots, \mathbf{d}_m$ . Tada B-Spline bazne funkcije  $N_i^n(u)$  i B-Spline kriva  $s(u)$ , definisane pomoću ovih podataka, imaju sledeća svojstva:

- Ako je  $t_j < t_{j+1}$  i  $j - n \leq l \leq j$ , tada
$$P_{i,j}^n(t_{l+1}, \dots, t_{l+n}) = \delta_{i,l}.$$



## Teorema 5

Fiksirajmo stepen  $n$ , odgovarajući vektor čvorova

$T = (t_0 \leq \dots \leq t_{m+n+1})$  i kontrolne tačke  $\mathbf{d}_0, \dots, \mathbf{d}_m$ . Tada B-Spline bazne funkcije  $N_i^n(u)$  i B-Spline kriva  $s(u)$ , definisane pomoću ovih podataka, imaju sledeća svojstva:

- Ako je  $t_j < t_{j+1}$  i  $j - n \leq l \leq j$ , tada  $P_{i,j}^n(t_{l+1}, \dots, t_{l+n}) = \delta_{i,l}$ .
- Pod istim pretpostavkama,  $\mathbf{d}_l = S_j(t_{l+1}, \dots, t_{l+n})$ .  
(*Primedba:* Sve polarne forme  $S_l, \dots, S_{l+n}$  imaju istu vrednost  $\mathbf{d}_l$ ).

## Teorema 5

Fiksirajmo stepen  $n$ , odgovarajući vektor čvorova

$T = (t_0 \leq \dots \leq t_{m+n+1})$  i kontrolne tačke  $\mathbf{d}_0, \dots, \mathbf{d}_m$ . Tada B-Spline bazne funkcije  $N_i^n(u)$  i B-Spline kriva  $s(u)$ , definisane pomoću ovih podataka, imaju sledeća svojstva:

- Ako je  $t_j < t_{j+1}$  i  $j - n \leq l \leq j$ , tada  $P_{i,j}^n(t_{l+1}, \dots, t_{l+n}) = \delta_{i,l}$ .
- Pod istim pretpostavkama,  $\mathbf{d}_l = S_j(t_{l+1}, \dots, t_{l+n})$ .  
(*Primedba:* Sve polarne forme  $S_l, \dots, S_{l+n}$  imaju istu vrednost  $\mathbf{d}_l$ ).
- Kriva  $s(u)$  je  $n - \mu$  puta diferencijabilna u  $\mu$ -obmotanom čvoru  $t_j$ .



## Teorema 5

Fiksirajmo stepen  $n$ , odgovarajući vektor čvorova

$T = (t_0 \leq \dots \leq t_{m+n+1})$  i kontrolne tačke  $\mathbf{d}_0, \dots, \mathbf{d}_m$ . Tada B-Spline bazne funkcije  $N_i^n(u)$  i B-Spline kriva  $s(u)$ , definisane pomoću ovih podataka, imaju sledeća svojstva:

- Ako je  $t_j < t_{j+1}$  i  $j - n \leq l \leq j$ , tada  $P_{i,j}^n(t_{l+1}, \dots, t_{l+n}) = \delta_{i,l}$ .
- Pod istim pretpostavkama,  $\mathbf{d}_l = S_j(t_{l+1}, \dots, t_{l+n})$ .  
(*Primedba:* Sve polarne forme  $S_l, \dots, S_{l+n}$  imaju istu vrednost  $\mathbf{d}_l$ ).
- Kriva  $s(u)$  je  $n - \mu$  puta diferencijabilna u  $\mu$ -obmotanom čvoru  $t_j$ .
- Tačka  $S_j(u_1, \dots, u_n)$  je sadržana u oskullirajućim  $(n - 1)$ -prostorima krive  $s$  za vrednosti parametara  $u_1, \dots, u_n$ . Ako se bilo koje  $u_i$  pojavljuje  $\mu$  puta, ta tačka je sadržana u oskullirajućem  $(n - \mu) -$  prostoru krive  $s(u)$  u  $u_i$ .

## Teorema 5

Fiksirajmo stepen  $n$ , odgovarajući vektor čvorova  $T = (t_0 \leq \dots \leq t_{m+n+1})$  i kontrolne tačke  $\mathbf{d}_0, \dots, \mathbf{d}_m$ . Tada B-Spline bazne funkcije  $N_i^n(u)$  i B-Spline kriva  $s(u)$ , definisane pomoću ovih podataka, imaju sledeća svojstva:

- Ako je  $t_j < t_{j+1}$  i  $j - n \leq l \leq j$ , tada  $P_{i,j}^n(t_{l+1}, \dots, t_{l+n}) = \delta_{i,l}$ .
- Pod istim pretpostavkama,  $\mathbf{d}_l = S_j(t_{l+1}, \dots, t_{l+n})$ .  
(*Primedba:* Sve polarne forme  $S_l, \dots, S_{l+n}$  imaju istu vrednost  $\mathbf{d}_l$ ).
- Kriva  $s(u)$  je  $n - \mu$  puta diferencijabilna u  $\mu$ -obmotanom čvoru  $t_j$ .
- Tačka  $S_j(u_1, \dots, u_n)$  je sadržana u oskulirajućim  $(n - 1)$ -prostorima krive  $s$  za vrednosti parametara  $u_1, \dots, u_n$ . Ako se bilo koje  $u_i$  pojavljuje  $\mu$  puta, ta tačka je sadržana u oskulirajućem  $(n - \mu) -$  prostoru krive  $s(u)$  u  $u_i$ .
- B-Spline kriva seče hiperravan u najviše onoliko tačaka u koliko je seče njen kontrolni poligon.



## Teorema 6

Ako je  $p(u)$  deo po deo polinomijalna kriva stepena  $\leq n$  koja je samo  $n - \mu_i$  puta diferencijabilna u  $u = u_i$ , tada postoji vektor čvorova  $T$  takav da

$$T = (\underbrace{u_1, \dots, u_1}_{\mu_1}, \underbrace{u_2, \dots, u_2}_{\mu_2}, \dots), \quad u_1 < u_2 < \dots$$

$$p(u) = \sum_{i=0}^m N_i^n(u) \mathbf{d}_i,$$

gde je

$$\mathbf{d}_l = S_j(t_{l+1}, \dots, t_{l+n}), \quad (t_j < t_{j+1}, j - n \leq l \leq j),$$

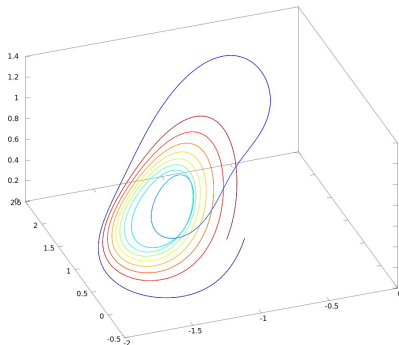
a  $S_j$  polarna forma polinoma  $p \mid [t_j, t_{j+1}]$ .



## NURBS krive

**NURBS** = *non-uniform rational B-spline*

Izraz "ne-uniformne" se odnosi na činjenicu da čvorovi ne moraju da budu jednako distribuirani po realnoj pravoj.



## Teorema 7

**NURBS** kriva  $s(u)$  stepena  $n$  u  $P^d$ , definisana vektorom čvorova  $T = (t_0 \leq \dots \leq t_{n+m+1})$  i svojim geometrijskim kontrolnim poligonom  $\mathbf{d}_0\mathbb{R}$ ,  $f_0\mathbb{R} = (\mathbf{d}_0 + \mathbf{d}_1)\mathbb{R}$ ,  $\mathbf{d}_1\mathbb{R}$ ,  $\dots$ ,  $\mathbf{d}_m\mathbb{R}$  ima sledeća svojstva:



## Teorema 7

**NURBS** kriva  $s(u)$  stepena  $n$  u  $P^d$ , definisana vektorom čvorova  $T = (t_0 \leq \dots \leq t_{n+m+1})$  i svojim geometrijskim kontrolnim poligonom  $\mathbf{d}_0\mathbb{R}$ ,  $f_0\mathbb{R} = (\mathbf{d}_0 + \mathbf{d}_1)\mathbb{R}$ ,  $\mathbf{d}_1\mathbb{R}$ ,  $\dots$ ,  $\mathbf{d}_m\mathbb{R}$  ima sledeća svojstva:

- 1 Restrikcija  $s(u)$  na neprazan interval  $[t_j, t_{j+1}]$  je racionalna Bézier-ova kriva

## Teorema 7

**NURBS** kriva  $s(u)$  stepena  $n$  u  $P^d$ , definisana vektorom čvorova  $T = (t_0 \leq \dots \leq t_{n+m+1})$  i svojim geometrijskim kontrolnim poligonom  $\mathbf{d}_0\mathbb{R}, f_0\mathbb{R} = (\mathbf{d}_0 + \mathbf{d}_1)\mathbb{R}, \mathbf{d}_1\mathbb{R}, \dots, \mathbf{d}_m\mathbb{R}$  ima sledeća svojstva:

- 1 Restrikcija  $s(u)$  na neprazan interval  $[t_j, t_{j+1}]$  je racionalna Bézier-ova kriva
- 2 (*svojstvo umanjene projektivne varijacije*)  
Hiperravan  $H$  seče  $s(u)$  (koja nije sadržana u  $H$ ) u najviše onoliko tačaka u koliko seče njen geometrijski kontrolni poligon.

## Teorema 7

**NURBS** kriva  $s(u)$  stepena  $n$  u  $P^d$ , definisana vektorom čvorova  $T = (t_0 \leq \dots \leq t_{n+m+1})$  i svojim geometrijskim kontrolnim poligonom  $\mathbf{d}_0\mathbb{R}$ ,  $f_0\mathbb{R} = (\mathbf{d}_0 + \mathbf{d}_1)\mathbb{R}$ ,  $\mathbf{d}_1\mathbb{R}, \dots, \mathbf{d}_m\mathbb{R}$  ima sledeća svojstva:

- 1 Restrikcija  $s(u)$  na neprazan interval  $[t_j, t_{j+1}]$  je racionalna Bézier-ova kriva
- 2 (*svojstvo umanjene projektivne varijacije*)  
Hiperravan  $H$  seče  $s(u)$  (koja nije sadržana u  $H$ ) u najviše onoliko tačaka u koliko seče njen geometrijski kontrolni poligon.
- 3 Kontrolne tačke  $\mathbf{d}_l\mathbb{R}$  su sadržane u  $(n - 1)$ -dimenzionom oskulirajućem potprostoru od  $s(u)$  za vrednosti parametara  $t_{l+1}, \dots, t_{l+n}$ .



## Teorema 7

**NURBS** kriva  $s(u)$  stepena  $n$  u  $P^d$ , definisana vektorom čvorova  $T = (t_0 \leq \dots \leq t_{n+m+1})$  i svojim geometrijskim kontrolnim poligonom  $\mathbf{d}_0 \mathbb{R}, f_0 \mathbb{R} = (\mathbf{d}_0 + \mathbf{d}_1) \mathbb{R}, \mathbf{d}_1 \mathbb{R}, \dots, \mathbf{d}_m \mathbb{R}$  ima sledeća svojstva:

- 1 Restrikcija  $s(u)$  na neprazan interval  $[t_j, t_{j+1}]$  je racionalna Bézier-ova kriva
- 2 (*svojstvo umanjene projektivne varijacije*)  
Hiperravan  $H$  seče  $s(u)$  (koja nije sadržana u  $H$ ) u najviše onoliko tačaka u koliko seče njen geometrijski kontrolni poligon.
- 3 Kontrolne tačke  $\mathbf{d}_l \mathbb{R}$  su sadržane u  $(n - 1)$ -dimenzionom oskulirajućem potprostoru od  $s(u)$  za vrednosti parametara  $t_{l+1}, \dots, t_{l+n}$ .
- 4 Svaka deo po deo racionalna kriva  $s(u)$  stepena  $\leq n$  je **NURBS** kriva stepena  $n$ .





## Primer (nastavak)

Vektor čvorova  $T = (-1, -1, -1, 1, 2, 2, 2)$ .

Polarna forma  $S_3$  od  $c$ :

$$S_3(u_1, u_2) = (u_1u_2 + 1, u_1u_2 - 1, -u_1 - u_2)$$

Polarna forma  $S_4$  od  $d$ :

$$S_4(u_1, u_2) = (u_1 + u_2, 2u_1u_2 - u_1 - u_2, -u_1 - u_2)$$

Kontrolne tačke:

$$\mathbf{d}_0 = S_3(-1, -1) = (2, 0, 2)$$

$$\mathbf{d}_1 = S_3(-1, 1) = (0, -2, 0) = S_4(-1, 2)$$

$$\mathbf{d}_2 = S_3(1, 2) = (3, 1, -3) = S_4(1, 2)$$

$$\mathbf{d}_3 = S_4(2, 2) = (4, 4, -4)$$

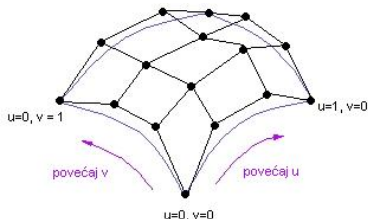


## Tenzorski proizvod površi

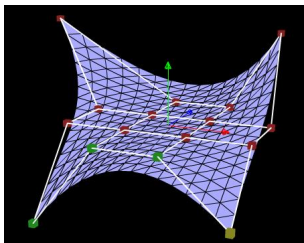
Razmatramo polinomijalne 2-površni

$$s(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(u) B_j^m(v) \mathbf{b}_{i,j},$$

koje su linearna kombinacija kontrolnih tačaka  $\mathbf{b}_{i,j}$  sa Bernstein-ovim polinomima. Takve površi nazivamo *tenzorskim proizvodom (TP) površi stepena  $(m, n)$* . Prave  $u = \text{const}$  i  $v = \text{const}$  su Bézier-ove krive stepena  $m$  i  $n$  respektivno.



## Tenzorski proizvod B-Spline površi



Tenzorski proizvod B-Spline površi je oblika

$$s(u, v) = \sum_{i=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} N_i^{n_1}(u) N_j^{n_2}(v) \mathbf{d}_{i,j},$$

gde su  $N_i^{n_1}(t)$  B-Spline bazne funkcije definisane vektorom čvorova  $T_1$ , a  $N_j^{n_2}(t)$  B-Spline bazne funkcije definisane drugim vektorom čvorova  $T_2$ .



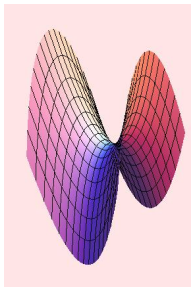
## Translatorne površi kao TP površi

TP Bézier-ova površ stepena  $(n, 1)$  je oblika

$$s(u, v) = (1 - v) \sum_{i=0}^n B_i^n(u) \mathbf{b}_{i0} + v \sum_{i=0}^n B_i^n(u) \mathbf{b}_{i1},$$

jer su Bernstein-ovi polinomi prvog reda:  $B_0^1(t) = (1 - t)$  i  $B_1^1(t) = t$ .

### Primer



TP površ stepena  $(1, 1)$  ima reprezentaciju:

$$\begin{aligned} s(u, v) = & (1 - u)(1 - v) \mathbf{b}_{00} \\ & + u(1 - v) \mathbf{b}_{10} \\ & + (1 - u)v \mathbf{b}_{01} \\ & + uv \mathbf{b}_{11} \end{aligned}$$

i predstavlja hiperbolički paraboliod.

## Baricentrične koordinate

Za *bazne tačke*  $s_0 = 0$ ,  $s_1 = 1$ , sve realne brojeve zapisujemo u obliku

$$t = t_0 s_0 + t_1 s_1, \quad t_0 + t_1 = 1. \quad (4)$$

Zapis je jedinstven ako stavimo  $t_0 = (1 - t)$  i  $t_1 = t$ .

Koordinate  $t$  u odnosu na bazne tačke  $s_0$  i  $s_1$  se nazivaju *baricentrične koordinate*.

Izaberemo bazni simpleks  $s_0, \dots, s_d$  u  $\mathbb{R}^d$ . Sve tačke  $u = (u_1, \dots, u_d) \in \mathbb{R}^d$  zapisujemo u obliku

$$u = \sum t_i s_i, \quad \sum t_i = 1. \quad (5)$$

Brojevi  $t_i$  zovu se *baricentrične koordinate* od  $u$ .

## Bernstein-ovi polinomi u baricentričnim koordinatama

U sistemu sa baznim tačkama  $s_0 = 0$ ,  $s_1 = 1$ , umesto  $B_i^n(t)$ , možemo pisati  $B_{i_0 i_1}(t_0, t_1)$ , gde je  $i = i_0$ ,  $n - i = i_1$ :

$$B_i^n(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} (1-t)^i t^{n-i} = B_{i_0 i_1}(t_0, t_1) = \frac{n!}{i_0! i_1!} t_0^{i_0} t_1^{i_1}.$$

## Bernstein-ovi polinomi u baricentričnim koordinatama

U sistemu sa baznim tačkama  $s_0 = 0$ ,  $s_1 = 1$ , umesto  $B_i^n(t)$ , možemo pisati  $B_{i_0 i_1}(t_0, t_1)$ , gde je  $i = i_0$ ,  $n - i = i_1$ :

$$B_i^n(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} (1-t)^i t^{n-i} = B_{i_0 i_1}(t_0, t_1) = \frac{n!}{i_0! i_1!} t_0^{i_0} t_1^{i_1}.$$

U sistemu sa baznim simpleksom  $s_0, \dots, s_d$ , svaki Bernstein-ov polinom stepena  $n$  je oblika

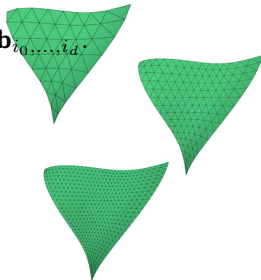
$$B_{i_0, \dots, i_d}(u) = \frac{n!}{i_0! \dots i_d!} t_0^{i_0} \dots t_d^{i_d},$$

gde je  $i_0 + \dots + i_d = n$ ,  $i_0 \geq 0, \dots, i_d \geq 0$ .

## Trogaone Bézier-ove površi

*Trogaona Bézier-ova  $d$ -površ* stepena  $n$  je površ oblika

$$s(u) = \sum_{i_0 + \dots + i_d = n} B_{i_0, \dots, i_d}(u) \mathbf{b}_{i_0, \dots, i_d}$$

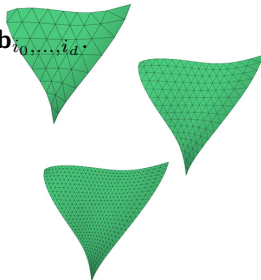


## Trogaone Bézier-ove površi

*Trogaona Bézier-ova  $d$ -površ stepena  $n$  je površ oblika*

$$s(u) = \sum_{i_0 + \dots + i_d = n} B_{i_0, \dots, i_d}(u) \mathbf{b}_{i_0, \dots, i_d}$$

Tačke  $\mathbf{b}_{i_0, \dots, i_d}$  zovu se *kontrolne tačke*.

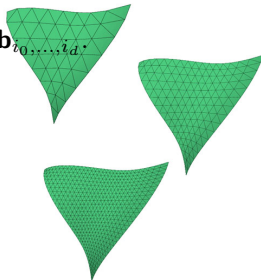


# Trougaone Bézier-ove površi

Trogaona Bézier-ova  $d$ -površ stepena  $n$  je površ oblika

$$s(u) = \sum_{i_0 + \dots + i_d = n} B_{i_0, \dots, i_d}(u) \mathbf{b}_{i_0, \dots, i_d}$$

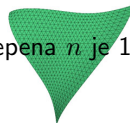
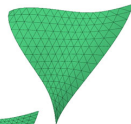
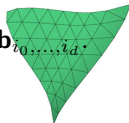
Tačke  $\mathbf{b}_{i_0, \dots, i_d}$  zovu se *kontrolne tačke*.  
Svojstva trougaone Bézierove  $d$ -površi:



## Trougaone Bézier-ove površi

Trogaona Bézier-ova  $d$ -površ stepena  $n$  je površ oblika

$$s(u) = \sum_{i_0 + \dots + i_d = n} B_{i_0, \dots, i_d}(u) \mathbf{b}_{i_0, \dots, i_d}$$



Tačke  $\mathbf{b}_{i_0, \dots, i_d}$  zovu se *kontrolne tačke*.


Svojstva trougaone Bézierove  $d$ -površi:

- Zbir svih koeficijenata funkcije  $B_{i_0, \dots, i_d}(u)$  stepena  $n$  je 1.



## Trougaone Bézier-ove površi

Trogaona Bézier-ova  $d$ -površ stepena  $n$  je površ oblika

$$s(u) = \sum_{i_0+\dots+i_d=n} B_{i_0,\dots,i_d}(u) \mathbf{b}_{i_0,\dots,i_d}$$


Tačke  $\mathbf{b}_{i_0,\dots,i_d}$  zovu se *kontrolne tačke*.

Svojstva trougaone Bézierove  $d$ -površi:

- Zbir svih koeficijenata funkcije  $B_{i_0,\dots,i_d}(u)$  stepena  $n$  je 1.
- Ako je  $u$  unutar simpleksa  $s_0, \dots, s_d$ , tada su koeficijenti funkcija izmedju 0 i 1.

## Trougaone Bézier-ove površi

Trougaona Bézier-ova  $d$ -površ stepena  $n$  je površ oblika

$$s(u) = \sum_{i_0 + \dots + i_d = n} B_{i_0, \dots, i_d}(u) \mathbf{b}_{i_0, \dots, i_d}$$

Tačke  $\mathbf{b}_{i_0, \dots, i_d}$  zovu se *kontrolne tačke*.

Svojstva trougaone Bézierove  $d$ -površi:

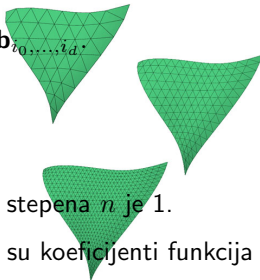
- Zbir svih koeficijenata funkcije  $B_{i_0, \dots, i_d}(u)$  stepena  $n$  je 1.
- Ako je  $u$  unutar simpleksa  $s_0, \dots, s_d$ , tada su koeficijenti funkcija izmedju 0 i 1.
- Restrikcija površi na afini  $r$ -dimenzionalni potprostor je trougaona Bézierova  $r$ -površ.  
(*Specijalno*: restrikcija na pravu unutar domena je Bézier-ova kriva)



## Trougaone Bézier-ove površi

Trougaona Bézier-ova  $d$ -površ stepena  $n$  je površ oblika

$$s(u) = \sum_{i_0+\dots+i_d=n} B_{i_0,\dots,i_d}(u) \mathbf{b}_{i_0,\dots,i_d}$$



Tačke  $\mathbf{b}_{i_0,\dots,i_d}$  zovu se *kontrolne tačke*.

Svojstva trougaone Bézierove  $d$ -površi:

- Zbir svih koeficijenata funkcije  $B_{i_0,\dots,i_d}(u)$  stepena  $n$  je 1.
- Ako je  $u$  unutar simpleksa  $s_0, \dots, s_d$ , tada su koeficijenti funkcija između 0 i 1.
- Restrikcija površi na afini  $r$ -dimenzionalni potprostor je trougaona Bézierova  $r$ -površ.  
(*Specijalno*: restrikcija na pravu unutar domena je Bézier-ova kriva)
- Za argumente  $u = s_0, u = s_1, \dots, u = s_d$  površ uzima vrednosti  $\mathbf{b}_{n,0,\dots,0}, \mathbf{b}_{0,n,0,\dots,0}, \dots, \mathbf{b}_{0,\dots,0,n}$ .

## Bézier-ova površ kao linearna kombinacija monoma

Polinomijalna  $d$ -površ stepena  $n$  u  $\mathbb{R}^m$  data je kao linearna kombinacija  $f(x_1, \dots, x_d) = \sum a_\alpha x^\alpha$  monoma sa koeficijentima  $a_\alpha \in \mathbb{R}^m$ .

Stepen Bézier-ove reprezentacije  $n$  mora biti veći ili jednak od totalnog stepena  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ .

Odredimo  $\alpha_0$  tako da  $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_d = n$  i definišemo multi-indeks  $i = (i_1, \dots, i_n)$ :

$$\mathbf{i} = \underbrace{(0, \dots, 0)}_{\alpha_0}, \underbrace{(1, \dots, 1)}_{\alpha_1}, \dots, \underbrace{(d, \dots, d)}_{\alpha_d}.$$

## Multi-afine polarne forme

### Definicija 9

Posmatramo multilinearano preslikavanje

$$\bar{P}(\bar{\mathbf{x}}^1, \dots, \bar{\mathbf{x}}^n) = \frac{1}{\#\sigma} \sum_{\sigma} \bar{\mathbf{x}}_{\bullet\sigma(i)},$$

gde  $\sigma$  prolazi kroz sve permutacije multi-indeksa  $\mathbf{i}$ , simbol  $\#\sigma$  označava broj tih permutacija, a  $\bar{\mathbf{x}}_{\bullet i}$  znači  $x_{i_1}^1 \cdots x_{i_n}^n$  ( $0 \leq i_j \leq d$ ).

## Multi-afine polarne forme

### Definicija 9

Posmatramo multilinearne preslikavanje

$$\bar{P}(\bar{\mathbf{x}}^1, \dots, \bar{\mathbf{x}}^n) = \frac{1}{\#\sigma} \sum_{\sigma} \bar{\mathbf{x}}_{\bullet\sigma(i)},$$

gde  $\sigma$  prolazi kroz sve permutacije multi-indeksa  $\mathbf{i}$ , simbol  $\#\sigma$  označava broj tih permutacija, a  $\bar{\mathbf{x}}_{\bullet i}$  znači  $x_{i_1}^1 \cdots x_{i_n}^n$  ( $0 \leq i_j \leq d$ ).

*Multi-afina polarna forma* monoma  $\mathbf{x}^\alpha$  je preslikavanje  $P$  dato sa

$$P(\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^n) = \bar{P}(\bar{\mathbf{x}}^1, \dots, \bar{\mathbf{x}}^n), \text{ sa } x_0^1 = \cdots = x_0^n = 1.$$

## Teorema 8

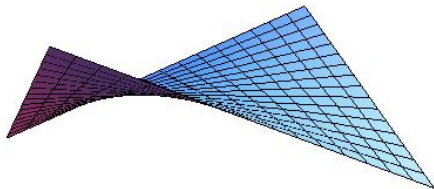
Neka je  $f(x_1, \dots, x_d) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha}$  polinomijalna  $d$ -površ u  $\mathbb{R}^m$ . Ako je  $n > |\alpha|$  za sve  $\alpha$  koji se pojavljuju u definiciji  $f$ , odredimo multi-afinu polarnu formu  $P(\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^n)$  od  $f$  komponentu po komponentu i njihovim linearnim kombinacijama odredimo multi-afine polarne forme monoma, kao što je prethodno opisano. Tada je  $f$  trougaona Bézier-ova  $d$ -površ nad baznim simpleksom  $s_0, \dots, s_d$  i kontrolnim tačkama

$$\mathbf{b}_{i_0, \dots, i_d} = P(\underbrace{s_0, \dots, s_0}_{i_0}, \dots, \underbrace{s_d, \dots, s_d}_{i_d}).$$

## Primer

Razmatramo 2-površ koja je grafik funkcije  $x_1 \cdot x_2$ :

$$(x_1, x_2) \mapsto f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}^{1,0} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}^{0,1} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}^{1,1}$$



Zapisujemo ovu površ kao trougaonu Bézier-ovu površ stepena  $n = 2$  nad baznim trouglom  $s_0 = (0, 0)$ ,  $s_1 = (1, 0)$ ,  $s_2 = (0, 1)$ .



## Primer (nastavak)

Monom  $\mathbf{x}^{(1,0)}$

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_0 = 1 \Rightarrow \mathbf{i} = (0, 1)$$

Polarna forma  $\bar{P}'$ :

$$\bar{P}'(\bar{\mathbf{x}}^1, \bar{\mathbf{x}}^2) = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{x}}_{\bullet,0,1} + \bar{\mathbf{x}}_{\bullet,1,0}) = \frac{1}{2}(x_0^1 x_1^2 + x_1^1 x_0^2)$$

Multi-afina polarna forma za  $x_0^1 = x_0^2 = 1$ :

$$P'(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_1^1)$$

## Primer (nastavak)

Monom  $\mathbf{x}^{(0,1)}$

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1 \Rightarrow \alpha_0 = 1 \Rightarrow \mathbf{i} = (0, 2)$$

Polarna forma  $\bar{P}''$ :

$$\bar{P}''(\bar{\mathbf{x}}^1, \bar{\mathbf{x}}^2) = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{x}}_{\bullet,0,2} + \bar{\mathbf{x}}_{\bullet,2,0}) = \frac{1}{2}(x_0^1 x_2^2 + x_2^1 x_0^2)$$

Multi-afina polarna forma za  $x_0^1 = x_0^2 = 1$ :

$$P''(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) = \frac{1}{2}(x_2^2 + x_2^1)$$

## Primer (nastavak)

Monom  $\mathbf{x}^{(1,1)}$

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1 \Rightarrow \alpha_0 = 0 \Rightarrow \mathbf{i} = (1, 2)$$

Polarna forma  $\bar{P}'''$ :

$$\bar{P}'''(\bar{\mathbf{x}}^1, \bar{\mathbf{x}}^2) = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{x}}_{\bullet,1,2} + \bar{\mathbf{x}}_{\bullet,2,1}) = \frac{1}{2}(x_1^1 x_2^2 + x_2^1 x_1^2)$$

Multi-afina polarna forma za  $x_0^1 = x_0^2 = 1$ :

$$P'''(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) = \frac{1}{2}(x_1^1 x_2^2 + x_2^1 x_1^2)$$



## Primer (nastavak)

Polarna forma od  $f$  data je kao linearna kombinacija

$$P(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} P' + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} P'' + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} P''' = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1^1 + x_1^2 \\ x_2^1 + x_2^2 \\ x_1^1 x_2^2 + x_2^1 x_1^2 \end{bmatrix}$$

Kontrolne tačke

$$\mathbf{b}_{200} = P(s_0, s_0) = (0, 0, 0)$$

$$\mathbf{b}_{020} = P(s_1, s_1) = (1, 0, 0)$$

$$\mathbf{b}_{002} = P(s_2, s_2) = (0, 1, 0)$$

$$\mathbf{b}_{110} = P(s_0, s_1) = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$$

$$\mathbf{b}_{101} = P(s_0, s_2) = \left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$$

$$\mathbf{b}_{011} = P(s_1, s_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Površ

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i+j+k=2} B_{ijk}(u_0, u_1, u_2) \cdot \mathbf{b}_{ijk},$$

gde su  $u_0, u_1, u_2$  baricentrične koordinate tačke  $\mathbf{x}$  u odnosu na  $\triangle s_0 s_1 s_2$ .

## Racionalne Bézier-ove površi

*Racionalne Bézier-ove površi* su površi oblika

$$f(x_1, \dots, x_d) = f(x_1, \dots, x_d)\mathbb{R},$$

gde je  $f$  obična polinomijalna Bézier-ova površ (trougona ili TP).

## Racionalne Bézier-ove površi

*Racionalne Bézier-ove površi* su površi oblika

$$f(x_1, \dots, x_d) = f(x_1, \dots, x_d)\mathbb{R},$$

gde je  $f$  obična polinomijalna Bézier-ova površ (trougona ili TP).

*Racionalna B-Spline površ* je istog oblika, gde je  $f$  polinomijalna B-Spline površ.

## Racionalne Bézier-ove površi

*Racionalne Bézier-ove površi* su površi oblika

$$f(x_1, \dots, x_d) = f(x_1, \dots, x_d)\mathbb{R},$$

gde je  $f$  obična polinomijalna Bézier-ova površ (trougona ili TP).

*Racionalna B-Spline površ* je istog oblika, gde je  $f$  polinomijalna B-Spline površ.

Racionalni tenzorski proizvod B-Spline površi se naziva **NURBS** površ.

## Racionalne Bézier-ove površi

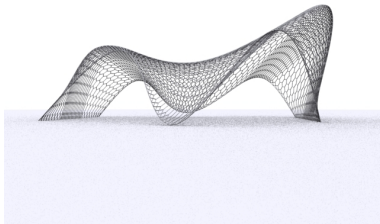
*Racionalne Bézier-ove površi* su površi oblika

$$f(x_1, \dots, x_d) = f(x_1, \dots, x_d) \mathbb{R},$$

gde je  $f$  obična polinomijalna Bézier-ova površ (trougaona ili TP).

*Racionalna B-Spline površ* je istog oblika, gde je  $f$  polinomijalna B-Spline površ.

Racionalni tenzorski proizvod B-Spline površi se naziva **NURBS** površ.





## Racionalne Bézier-ove površi

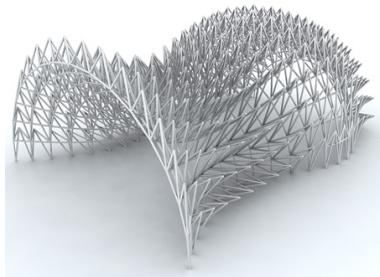
*Racionalne Bézier-ove površi* su površi oblika

$$f(x_1, \dots, x_d) = f(x_1, \dots, x_d)\mathbb{R},$$

gde je  $f$  obična polinomijalna Bézier-ova površ (trougaona ili TP).

*Racionalna B-Spline površ* je istog oblika, gde je  $f$  polinomijalna B-Spline površ.

Racionalni tenzorski proizvod B-Spline površi se naziva **NURBS** površ.



## Racionalne Bézier-ove površi

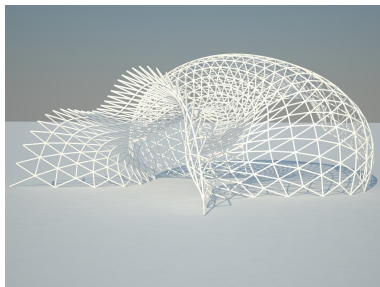
*Racionalne Bézier-ove površi* su površi oblika

$$f(x_1, \dots, x_d) = f(x_1, \dots, x_d)\mathbb{R},$$

gde je  $f$  obična polinomijalna Bézier-ova površ (trougaona ili TP).

*Racionalna B-Spline površ* je istog oblika, gde je  $f$  polinomijalna B-Spline površ.

Racionalni tenzorski proizvod B-Spline površi se naziva **NURBS** površ.



## Primer

Sfera je racionalna površ. Stereografska projekcija sa centrom  $(0, 0, 1)$  slika tačku  $p$  na  $(x, y, 0)$  ako je

$$p = \frac{1}{1 + x^2 + y^2} (2x, 2y, x^2 + y^2 - 1).$$

## Primer

Sfera je racionalna površ. Stereografska projekcija sa centrom  $(0, 0, 1)$  slika tačku  $p$  na  $(x, y, 0)$  ako je

$$p = \frac{1}{1 + x^2 + y^2} (2x, 2y, x^2 + y^2 - 1).$$

Kvadratna racionalna parametrizacija sfere bez severnog pola  $(0, 0, 1)$  data je sa

$$f(x_1, x_2) = f(x_1, x_2)\mathbb{R} = (1 + x_1^2 + x_2^2, 2x_1, 2x_2, x_1^2 + x_2^2 - 1)\mathbb{R}.$$

## Primer

Sfera je racionalna površ. Stereografska projekcija sa centrom  $(0, 0, 1)$  slika tačku  $p$  na  $(x, y, 0)$  ako je

$$p = \frac{1}{1 + x^2 + y^2} (2x, 2y, x^2 + y^2 - 1).$$

Kvadratna racionalna parametrizacija sfere bez severnog pola  $(0, 0, 1)$  data je sa

$$f(x_1, x_2) = f(x_1, x_2)\mathbb{R} = (1 + x_1^2 + x_2^2, 2x_1, 2x_2, x_1^2 + x_2^2 - 1)\mathbb{R}.$$

Sfera je trougaona Bézier-ova površ stepena  $n$  (za sve  $n \geq 2$ ).

## Primer (nastavak)

Polarna forma od  $f$  je data sa

$$P(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) = \begin{bmatrix} 1 + P''' + P'''' \\ 2P' \\ 2P'' \\ P''' + P'''' - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^1 x_1^2 + x_2^1 x_2^2 + 1 \\ 2x_1^1 + x_1^2 \\ x_2^1 + x_2^2 \\ x_1^1 x_1^2 + x_2^1 x_2^2 - 1 \end{bmatrix}$$

Jedinična sfera i Bézier-ove tačke za bazni trougao

$$s_0 = (0, \frac{1}{2}), s_1 = (\frac{1}{2}, 0), s_2 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}).$$

