3.3. ПРАТЕЋИ НИЗ НЕЗАВИСНИХ СЛУЧАЈНИХ ВЕЛИЧИНА

ДЕФИНИЦИЈА ПРАТЕЋЕГ НИЗА

ДЕФИНИЦИЈА 3.3.1. Нека је (X_n) строго стационаран случајан низ и $F(x) = P\{X_n \leqslant x\}$ заједничка функција расподеле чланова тог низа. Низ (X_n^*) независних случајних величина са заједничком функцијом расподеле $F(x)$ зове се *пратећи низ независних случајних величина.*

За строго стационаран низ (X_n) и пратећи низ независних случајних величина (X_n^*) означимо

$$M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\},$$
$$M_n^* = \max\{X_1^*, \ldots, X_n^*\}.$$

Основни резултат који ћемо доказати у овом одељку тврди да при одређеним условима слабе зависности за низ (X_n), максимуми M_n и M_n^* имају исте асимптотске расподеле при $n \to \infty$, при чему су и нормирајуће константе исте. За то је довољно претпоставити да низ (X_n) задовољава услове $D(u_n)$ и $D'(u_n)$, за $u_n = a_n x + b_n$ и сваки реалан број x, при чему су $a_n > 0$ и b_n нормирајуће константе за максимум M_n у одговарајућој граничној теореми. Тај резултат омогућава да се задатак одређивања асимптотске расподеле максимума првих n чланова стационарног низа који задовољава услове $D(u_n)$ и $D'(u_n)$, сведе на аналоган задатак за пратећи низ независних случајних величина.

АСИМПТОТИКА ВЕРОВАТНОЋЕ $P\{M_n \leqslant u_n\}$

Прво ћемо доказати резултате, који представљају уопштење теореме 2.3.3 и дају довољне услове за стационаран низ (X_n), при којима се асимптотско понашање вероватноће $P\{M_n \leqslant u_n\}$ одређује на основу асимптотског понашања репа $1 - F(u_n)$.

ТЕОРЕМА 3.3.1. *Нека је (X_n) строго стационаран случајан низ, $F(x) = P\{X_1 \leqslant x\}$, (u_n) низ реалних бројева такав да важе услови $D(u_n)$ и $D'(u_n)$ и $0 \leqslant \tau < +\infty$. Тада једнакост*

$$\lim_{n\to\infty} P\{M_n \leqslant u_n\} = e^{-\tau}, \tag{3.3.1}$$

важи ако и само ако је

$$\lim_{n\to\infty} n(1 - F(u_n)) = \tau. \tag{3.3.2}$$

Доказ. За фиксиран природан број k означимо $m = [n/k]$. Важи једнакост

$$\{M_m > u_n\} = \bigcup_{j=1}^{m} \{X_j > u_n\}. \qquad (3.3.3)$$

Означимо: $A_j = \{X_j > u_n\}$. Користећи Бонферонијеву неједнакост и једнакост (3.3.3) добијамо да је

$$\sum_{j=1}^{m} P(A_j) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant m} P(A_i A_j) \leqslant P\{M_m > u_n\} \leqslant \sum_{j=1}^{m} P(A_j). \qquad (3.3.4)$$

Приметимо да је $P(A_j) = 1 - F(u_n)$. Прелазећи на комплементаран догађај, из неједнакости (3.3.4) добијамо следеће неједнакости

$$1 - m(1 - F(u_n)) \leqslant P\{M_m \leqslant u_n\}$$

$$\leqslant 1 - m(1 - F(u_n)) + m \sum_{j=2}^{m} P(A_1 A_j). \qquad (3.3.5)$$

Последњи сабирак у претходној неједнакости означимо са $S(n, k)$, тј.

$$S(n, k) = m \sum_{j=2}^{m} P(A_1 A_j) = \left[\frac{n}{k}\right] \sum_{j=2}^{m} P(A_1 A_j).$$

Користећи услов $D'(u_n)$ добијамо да је

$$S_0(k) := \limsup_{n \to \infty} S(n, k) = o(1/k), \quad k \to \infty. \qquad (3.3.6)$$

(a) Нека важи (3.3.2), тј. $n(1 - F(u_n)) \to \tau \geqslant 0$, $n \to \infty$. Тада при $n \to \infty$ важи $km(1 - F(u_n)) \to \tau$, тј.

$$m(1 - F(u_n)) \to \tau/k. \qquad (3.3.7)$$

Из неједнакости (3.3.5) и релације (3.3.7) добијамо да за сваки k важи

$$1 - \frac{\tau}{k} \leqslant \liminf_{n \to \infty} P\{M_m \leqslant u_n\}$$

$$\leqslant \limsup_{n \to \infty} P\{M_m \leqslant u_n\} \leqslant 1 - \frac{\tau}{k} + S_0(k),$$

односно, за сваки k важе неједнакости

$$\left(1 - \frac{\tau}{k}\right)^k \leqslant \liminf_{n \to \infty} P^k\{M_m \leqslant u_n\} \leqslant \limsup_{n \to \infty} P^k\{M_m \leqslant u_n\}$$

$$\leqslant \left(1 - \frac{\tau}{k} + S_0(k)\right)^k. \qquad (3.3.8)$$

Користећи неједнакости (3.3.8) и релације (3.3.6) и (3.2.5) добијамо

$$e^{-\tau} \leqslant \liminf_{n\to\infty} P\{M_n \leqslant u_n\} \leqslant \limsup_{n\to\infty} P\{M_n \leqslant u_n\} \leqslant e^{-\tau}.$$

Према томе, $\lim\limits_{n\to\infty} P\{M_n \leqslant u_n\} = e^{-\tau}$, тј. важи (3.3.1).

(б) Нека је $\lim\limits_{n\to\infty} P\{M_n \leqslant u_n\} = e^{-\tau}$, тј. нека важи (3.3.1). Из неједнакости (3.3.5) следи

$$1 - P\{M_m \leqslant u_n\} \leqslant m(1 - F(u_n)) \leqslant 1 - P\{M_m \leqslant u_n\} + S(n,k). \quad (3.3.9)$$

Користећи (3.2.5) добијамо да је $\lim\limits_{n\to\infty} P\{M_m \leqslant u_n\} = e^{-\tau/k}$, па из неједнакости (3.3.9) следи

$$1 - e^{-\tau/k} \leqslant \liminf_{n\to\infty} m(1 - F(u_n))$$

$$\leqslant \limsup_{n\to\infty} m(1 - F(u_n)) \leqslant 1 - e^{-\tau/k} + S_0(k),$$

одакле добијамо следеће неједнакости

$$k(1 - e^{-\tau/k}) \leqslant \liminf_{n\to\infty} n(1 - F(u_n))$$

$$\leqslant \limsup_{n\to\infty} n(1 - F(u_n)) \leqslant k(1 - e^{-\tau/k} + S_0(k)). \quad (3.3.10)$$

Неједнакости (3.3.10) важе за сваки природан број k, а $S_0(k) = o(1/k)$ при $k \to \infty$. Како $k(1 - e^{-\tau/k}) \to \tau$ при $k \to \infty$, то из (3.3.10) следи да је $\lim\limits_{n\to\infty} n(1 - F(u_n)) = \tau$, тј. важи (3.3.2). ■

ТЕОРЕМА 3.3.2. *Нека је (X_n) строго стационаран случајан низ и $F(x) = P\{X_1 \leqslant x\}$. Претпоставимо да за сваки реалан број τ из неког интервала $[\tau_0, +\infty)$ постоји низ реалних бројева (v_n), такав да је $\lim\limits_{n\to\infty} n(1-F(v_n)) = \tau$ и да важе услови $D(v_n)$ и $D'(v_n)$. Тада, једнакост*

$$\lim_{n\to\infty} P\{M_n \leqslant u_n\} = 0, \quad (3.3.11)$$

важи за неки низ реалних бројева (u_n), ако и само ако је

$$\lim_{n\to\infty} n(1 - F(u_n)) = +\infty. \quad (3.3.12)$$

Доказ. (а) Претпоставимо да важи (3.3.12). Нека је τ фиксиран број у интервалу $[\tau_0, +\infty)$ и (v_n) њему одговарајући низ реалних бројева за који важи услов теореме. Како $n(1 - F(v_n)) \to \tau$ и $n(1 - F(u_n)) \to \infty$, то за довољно велике индексе n важе неједнакости $u_n \leqslant v_n$ и

$$P\{M_n \leqslant u_n\} \leqslant P\{M_n \leqslant v_n\}. \quad (3.3.13)$$

Из теореме 3.3.1 следи да $P\{M_n \leqslant v_n\} \to e^{-\tau}$, при $n \to \infty$, па из (3.3.13) добијамо да за свако $\tau \geqslant \tau_0$ важи $\limsup_{n\to\infty} P\{M_n \leqslant u_n\} \leqslant e^{-\tau}$. При $\tau \to \infty$ добијамо $\lim\limits_{n\to\infty} P\{M_n \leqslant u_n\} = 0$, тј. важи (3.3.11).

(б) Претпоставимо да важи (3.3.11). Нека је τ фиксиран број у интервалу $[\tau_0, +\infty)$ и (v_n) њему одговарајући низ реалних бројева, такав да $n(1 - F(v_n)) \to \tau$ и да важе услови $D(v_n)$ и $D'(v_n)$. Из теореме (3.3.1) следи да $P\{M_n \leqslant v_n\} \to e^{-\tau} > 0$, при $n \to \infty$. Како $P\{M_n \leqslant u_n\} \to 0$, то за довољно велике индексе n важи $u_n \leqslant v_n$ и

$$n(1 - F(u_n)) \geqslant n(1 - F(v_n)). \tag{3.3.14}$$

Како $n(1 - F(v_n)) \to \tau$, то из (3.3.14) добијамо $\liminf_{n\to\infty} n(1 - F(u_n)) \geqslant \tau$, а како τ може бити произвољан број из интервала $[\tau_0, +\infty)$, то при $\tau \to \infty$ добијамо $\lim\limits_{n\to\infty} n(1 - F(u_n)) = \infty$. ■

Сада можемо доказати теорему на основу које се одређује асимптотска расподела максимума строго стационарног низа, који задовољава услове слабе зависности $D(u_n)$ и $D'(u_n)$.

АСИМПТОТСКА РАСПОДЕЛА МАКСИМУМА M_n ПРИ УСЛОВИМА $D(u_n)$ И $D'(u_n)$

ТЕОРЕМА 3.3.3. [Leadbetter (1974)] *Нека је (X_n) строго стационаран низ, $a_n > 0$, $b_n \in \mathbf{R}$ и $u_n = a_n x + b_n$ низови константи и $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Претпоставимо да за сваки реалан број x важе услови $D(u_n)$ и $D'(u_n)$. Нека је (X_n^*) пратећи низ независних случајних величина и $M_n^* = \max\{X_1^*, \dots, X_n^*\}$. Тада једнакост*

$$\lim_{n\to\infty} P\{M_n \leqslant a_n x + b_n\} = G(x),$$

важи за неку недегенерисану функцију расподеле G и сваки реалан број $x \in C(G)$, ако и само ако је

$$\lim_{n\to\infty} P\{M_n^* \leqslant a_n x + b_n\} = G(x).$$

Доказ. (а) Нека је $G(x) > 0$ и $\tau = -\ln G(x)$. Тада важи

$$\begin{aligned} & P\{M_n^* \leqslant u_n\} \to G(x), \\ \iff\ & P\{M_n^* \leqslant u_n\} \to e^{\ln G(x)} = e^{-\tau}, \\ \iff\ & n(1 - F(u_n)) \to \tau \qquad \text{(на основу теореме 2.3.3)} \\ \iff\ & P\{M_n \leqslant u_n\} \to e^{-\tau} \qquad \text{(на основу теореме 3.3.1).} \end{aligned}$$

(б) Случај $G(x) = 0$. Из теореме о екстремалним типовима за стационарне низове добијамо да је $G(x)$, као функција расподеле екстремних вредности, непрекидна. Нека је τ произвољан број за који важи $0 < \tau < +\infty$. Тада постоји x_τ, тако да важи $G(x_\tau) = e^{-\tau}$. Према претпоставци теореме за низ

$$v_n(\tau) = a_n x_\tau + b_n,$$

важе услови $D(v_n(\tau))$ и $D'(v_n(\tau))$. Из теорема 2.3.3 и 3.3.1 добијамо да сваки од услова

$$P\{M_n^* \leqslant v_n(\tau)\} \to G(x_\tau) = e^{-\tau}, \quad n \to \infty,$$

$$P\{M_n \leqslant v_n(\tau)\} \to G(x_\tau) = e^{-\tau}, \quad n \to \infty,$$

имплицира да при $n \to \infty$ важи

$$n\{1 - F_n(v_n(\tau))\} \to \tau.$$

У случају $G(x) = 0$, тврђење следи на основу теореме 3.2.2. ■

СТАЦИОНАРНИ НОРМАЛНИ НИЗОВИ

У параграфу 2.8, пример 2.8.2, доказано је да нормална расподела припада области привлачења Гумбелове расподеле, тј. максимум n независних случајних величина са нормалном $\mathcal{N}(0,1)$ расподелом има асимптотски при $n \to \infty$ Гумбелову двојно експоненцијалну расподелу. У раду Berman (1964) доказано је да аналоган резултат важи за нормалне стационарне низове под врло слабим довољним условом који треба да задовољава коваријациона функција стационарног случајног низа. Услов о коме је реч односи се на брзину конвергенције коваријационог низа ка нули. При томе, нормирајуће константе су исте као нормирајуће константе које се користе у одговарајућој граничној теореми за максимум пратећег низа независних нормално расподељених случајних величина. Тачније важи следећа теорема:

ТЕОРЕМА 3.3.4. [Berman (1964)] *Нека је (X_n) стационаран нормалан случајан низ за који важи $EX_1 = 0$, $DX_1 = 1$ и где је $r_n = E(X_k X_{k+n})$, $n \in \mathbf{N}$, коваријациони низ. Ако важи један од следећа два услова*

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} r_n \ln n = 0$ *или* (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r_n^2 < +\infty$, *онда за сваки реалан број x важи*

$$\lim_{n\to\infty} P\{M_n \leqslant a_n x + b_n\} = \exp\{-e^{-x}\},$$

где су константе a_n *и* b_n *дате једнакостима* (2.8.23) *и* (2.8.24).

На овом месту наводимо само неколико коментара у вези са управо формулисаним резултатом. Берманов доказ теореме 3.3.4 базиран је на чињеници да се вероватноћа $P\{M_n \leqslant u_n\}$ може апроксимирати са $\{\Phi(u_n)\}^n$, где је Φ стандардна нормална функција расподеле, а то је последица следеће леме:

ЛЕМА 3.3.1. [Berman (1964)] *Нека је* (X_n) *стационаран нормалан низ са* $EX_1 = 0$, $DX_1 = 1$ *и нека је* $1 \leqslant l_1 \leqslant l_2 \leqslant \ldots \leqslant l_s$. *Тада, постоји константа* K, *таква да за сваки* $x \in \mathbf{R}$ *важи неједнакост*

$$\left| P\left(\bigcap_{j=1}^{s} \{X_{l_j} \leqslant u\} \right) - \Phi^s(u) \right| \leqslant K \sum_{1\leqslant i<j\leqslant s} |\rho_{ij}| \exp\left\{ -\frac{u^2}{1+|\rho_{ij}|} \right\},$$

где је $\rho_{ij} = r_{l_i - l_j} = E(X_{l_i} X_{l_j})$.

Општа теорија екстремних вредности стационарних низова, заснована на условима $D(u_n)$ и $D'(u_n)$, може се применити и на стационарне нормалне низове и тиме доказати теорема 3.3.4. Такав доказ дат је у раду Leadbetter (1974) и базиран је на следећој леми:

ЛЕМА 3.3.2. [Leadbetter (1974)] *Нека је* (X_n) *стандардан стационаран нормалан низ. Ако за коваријациони низ* (r_n) *важи један од услова* $\lim_{n\to\infty} r_n \ln n = 0$ *или* $\sum_{n=1}^{\infty} r_n < +\infty$, *и ако је* (u_n) *низ реалних бројева одређен условом* $1 - \Phi(u_n) = \tau/n$, *онда су задовољени услови* $D(u_n)$ *и* $D'(u_n)$.

Детаље доказа и библиографија радова посвећених екстремним вредностима стационарних нормалних низова могу се наћи у књизи Leadbetter, Lindgren, Rootzén (1983). Поменимо да је брзина конвергенције у овом случају одређена у раду Rootzén (1983). Екстремне вредности стационарних процеса са непрекидним параметром су проучаване у раду Leadbetter, Rootzén (1982).