ЕКСТРЕМНЕ ВРЕДНОСТИ СТАЦИОНАРНИХ НИЗОВА

3.1. СТАЦИОНАРНИ СЛУЧАЈНИ НИЗОВИ

УВОДНЕ НАПОМЕНЕ

У претходној глави разматрали смо проблем одређивања асимптотске расподеле максимума првих n чланова низа *независних* случајних величина које имају *исту расподелу*, при $n \to \infty$. При разматрању конкретних проблема у којима екстремне вредности имају важну улогу, услов независности и услов да случајне величине које се проучавају имају исту расподелу, могу бити нарушени.

Природно се намеће питање да ли се претходно развијена теорија може проширити, тако да важи и у поменутим општим ситуацијама. Врло садржајна теорија развијена је за стационарне низове, код којих чланови и даље имају исту расподелу, али се, уместо услова независности, захтева да су чланови низа слабо зависни, ако се индекси тих чланова пуно разликују. Слична теорија постоји и за стационарне процесе са непрекидним параметрима, али ћемо се на овом месту бавити само стационарним низовима, тј. стационарним случајним процесима са дискретним параметром. Елементи ове теорије и опширна библиографија могу се наћи у књигама: Leadbetter, Lindgren, Rootzén (1983); Resnick (1987); Kotz, Nadarajah (2000); Reiss, Thomas (2001) и раду Leadbetter, Rootzén (1988).

Један од најважнијих резултата у теорији о екстремним вредностима стационарних процеса је теорема о екстремалним типовима, која тврди да се при одређеним условима помешаности (слабе зависности) као граничне расподеле максимума могу појавити само три поменуте расподеле екстремних вредности.

ДЕФИНИЦИЈА И ПРИМЕРИ

ДЕФИНИЦИЈА 3.1.1. Случајан низ X_1, X_2, X_3, ..., је *строго стационаран*, ако за све природне бројеве n и k случајни вектори

$$(X_1, X_2, \ldots, X_n) \quad \text{i} \quad (X_{1+k}, X_{2+k}, \ldots, X_{n+k})$$

имају исту расподелу.

Напомињемо да ћемо овде разматрати само строго стационарне низове у смислу дефиниције 3.1.1. Из те дефиниције непосредно следи да сви чланови строго стационарног низа имају исту расподелу, што је један од услова који је претпостављан и у класичној теорији екстремних вредности, која је дата у глави 2. Јасно је да низ независних случајних величина задовољава услов строге стационарности. Наводимо и два нетривијална примера строго стационарних низова.

ПРИМЕР 3.1.1. Нека су $\xi, \eta \in \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ независне случајне величине, $\lambda \in \mathbf{R}$ и X_n, $n \in \mathbf{N}$ низ случајних величина дефинисан са

$$X_n = \xi \cos(\lambda n) + \eta \sin(\lambda n). \tag{3.1.1}$$

Случајна величина X_n, дата са (3.1.1), нормално је расподељена, као линеарна комбинација нормалних случајних величина. Лако се проверава да за сваки природан број r и сваки ненегативан цео број s важи $E(X_r) = 0$ и

$$E(X_r X_{r+s}) = \sigma^2 \cos(\lambda s). \tag{3.1.2}$$

На основу (3.1.2) добијамо да случајни вектори $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ и $(X_{1+k}, X_{2+k}, \ldots, X_{n+k})$ имају исте коваријационе матрице, за све природне бројеве n и k. Како су у питању нормално расподељени случајни вектори, то они имају и исту расподелу, тј. низ (X_n) је строго стационаран.

ПРИМЕР 3.1.2. [Chernick (1981)] Нека је $k \geqslant 2$ природан број, (X_n) низ случајних величина дефинисан на следећи начин: X_0 је произвољна случајна величина са равномерном расподелом на интервалу [0,1] и

$$X_n = \frac{1}{k} X_{n-1} + \varepsilon_n, \quad \text{za } n \geqslant 1,$$

где је (ε_n) низ независних случајних величина са равномерном расподелом на скупу $\{0, 1/k, 2/k, \ldots (k-1)/k\}$, такав да ε_n не зависи од X_{n-1}. Тада је (X_n) строго стационаран низ чији сви чланови имају равномерну расподелу на интервалу [0,1].

УСЛОВИ СЛАБЕ ЗАВИСНОСТИ

Граничне теореме у теорији сумирања или у теорији екстремних вредности зависних случајних величина доказују се при одређеним претпоставкама о слабој зависности чланова тог низа чији се индекси пуно разликују. Као синоним за термин слаба зависност користи се и термин *помешаност.* Постоје различите дефиниције слабе зависности, одређене коефицијентима помешаности који дају меру зависности међу члановима строго стационарног низа случајних величина. У дефиницијама које следе сматрамо да индекс n узима вредности из скупа природних бројева. Дефиниције се на природан начин могу проширити на низове чији су чланови индексирани свим целим бројевима. Са $\mathfrak{M}_a^b$ означавамо σ-алгебру генерисану случајним величинама X_t, $a \leqslant t \leqslant b$.

Један од облика слабе зависности међу члановима строго стационарног случајног низа јесте зависност која се протеже само на коначне интервале. Тачније, чланови строго стационарног низа (X_n) су *m-зависни*, ако су случајне величине X_i и X_j независне за све индексе i и j који задовољавају услов $|i-j| > m$, односно ако су случајне величине X_{j_1}, X_{j_2}, $\ldots$, X_{j_n} потпуно независне у случају да се сви индекси j_1, j_2, $\ldots$, j_n међусобно разликују за више од m. Екстремне вредности на узорцима из m-зависних стационарних низова проучаване су у раду Watson (1954).

Зависност чланова строго стационарног низа, иако можда слаба, може се протезати и на бесконачност. У следећим двема дефиницијама уводи се ограничење на зависност догађаја који се односе на прошлост до неког тренутка t и на будућност после тренутка $t+k$.

ДЕФИНИЦИЈА 3.1.2. [Rosenblatt (1956)] Строго стационаран низ (X_n) задовољава *услов јаке помешаности* ако постоји низ $\alpha(k)$ (*коефицијент помешаности*), такав да $\alpha(k) \to 0$ при $k \to \infty$ и да неједнакост

$$\sup_{A \in \mathfrak{M}_1^t,\, B \in \mathfrak{M}_{t+k}^\infty} |P(AB) - P(A)P(B)| \leqslant \alpha(k),$$

важи за све природне бројеве t и k.

ДЕФИНИЦИЈА 3.1.3. [Ибрагимов (1962)] Строго стационаран низ (X_n) задовољава *услов равномерне јаке помешаности* ако постоји низ $\beta(k)$ (*коефицијент равномерне јаке помешаности*), такав да $\beta(k) \to 0$ при $k \to \infty$ и да неједнакост

$$\sup_{A \in \mathfrak{M}_1^t, P(A)>0,\, B \in \mathfrak{M}_{t+k}^\infty} |P(B \mid A) - P(B)| \leqslant \beta(k),$$

важи за све природне бројеве t и k.

Претходне две дефиниције ограничавају степен зависности произвољних догађаја $A \in \mathfrak{M}_1^t$ и $B \in \mathfrak{M}_{t+k}^\infty$. При проучавања екстремних вредности од посебног су интереса догађаји облика $\{X_j \leqslant u\}$, односно $\{X_j > u\}$, па се зато могу увести мање ограничавајуће дефиниције слабе зависности, које се односе само на такве догађаје.

ДЕФИНИЦИЈА 3.1.4. Строго стационаран случајан низ (X_n) задовољава *услов* D, ако за све природне бројеве

$$1 \leqslant j_1 < \cdots < j_k < j_{k+1} < \cdots < j_{k+m} \leqslant n,$$

где је $j_{k+1} - j_k \geqslant l$, и сваки реалан број u важи неједнакост

$$\left| P\left(\bigcap_{s=1}^{k+m} \{X_{j_s} \leqslant u\}\right) - P\left(\bigcap_{s=1}^{k} \{X_{j_s} \leqslant u\}\right) P\left(\bigcap_{s=k+1}^{k+m} \{X_{j_s} \leqslant u\}\right) \right| \leqslant d(l),$$

и $d(l) \to 0$ при $l \to \infty$.

ДЕФИНИЦИЈА 3.1.5. [Leadbetter (1974)] Нека је (X_n) строго стационаран случајан низ, а (u_n) низ реалних бројева. *Услов* $D(u_n)$ је задовољен, ако за све природне бројеве

$$1 \leqslant j_1 < \cdots < j_k < j_{k+1} < \cdots < j_{k+m} \leqslant n,$$

где је $j_{k+1} - j_k \geqslant l$, важи неједнакост

$$\left| P\left(\bigcap_{s=1}^{k+m} \{X_{j_s} \leqslant u_n\}\right) - P\left(\bigcap_{s=1}^{k} \{X_{j_s} \leqslant u_n\}\right) P\left(\bigcap_{s=k+1}^{k+m} \{X_{j_s} \leqslant u_n\}\right) \right| \leqslant \alpha_{n,l},$$

и $\alpha_{n,l_n} \to 0$ при $n \to \infty$ за неки низ $l_n = o(n)$.

ДЕФИНИЦИЈА 3.1.6. [Loynes (1965)] Нека је (X_n) строго стационаран случајан низ и (u_n) низ реалних бројева. *Услов* $D'(u_n)$ важи ако је

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \, n \cdot \sum_{j=2}^{[n/k]} P\{X_1 > u_n, X_j > u_n\} = 0.$$

Поменимо још да се при проучавању нормалних строго стационарних низова степен зависности често задаје коефицијентом корелације. На пример, ако је (X_n) строго стационаран случајан низ, чији сви чланови имају $\mathcal{N}(0,1)$ расподелу, онда се слаба зависност чланова тог низа може задати условом $r_n = E(X_j X_{j+n}) \to 0$ при $n \to \infty$.