Diferencijalna geometrija, domaći zadatak 1

1. Prosta ravna zatvorena kriva je konveksna ako i samo ako je njena orijentisana krivina konstantnog znaka. Dokazati.
2. Pokazati da je $\mathbb{R}P^n$ orijentabilna mnogostrukost ako i samo ako je n neparan broj.
3. Po ugledu na konstrukciju diferencijabilne strukture u prostoru $\mathbb{R}P^n$, naći diferencijabilnu strukturu u prostoru pravih koje prolaze kroz koordinatni po v cetak u prostoru $\mathbb{C}^{n+1}$. Ova mnogostrukost je kompleksni projektivni prostor. Koja je njegova (realna) dimenzija?
4. Dokazati da je $SO(3)$ homeomorfna $\mathbb{R}P^3$.
5. Kompleksna projektivna prava $\mathbb{C}P^1$ je difeomorfna sferi S^2. Dokazati.
6. Na skupu svih pravih ravni $\mathbb{R}^2$ uvesti diferencijabilnu strukturu. Pokazati da je dobijena mnogostrukost homeomorfna Mebijusovoj traci.
7. Dokazati da je produkt dve mnogostrukosti orijentabilna mnogostrukost ako i samo ako su orijentabilne komponente.

Diferencijalna geometrija, domaći zadatak 2

1. Dokazati da je kotangentno raslojenje n-dimenzione diferencijabilne mnogostrukosti $2n$-dimenziona mnogostrukost.

2. Dve baze tangentnog prostora mnogostrukosti su iste orijentacije, ukoliko je determinanta prelaska sa jedne baze u drugu pozitivna. Ovim je zadata relacija ekvivalencije među bazama jednog tangentnog prostora sa dve klase. Odabir klase orijentacije je neprekidan u tački p ako postoji okolina te tačke U_p i lokalno definisan pokretni reper $X_1, \ldots, X_n$ u okolini U_p takav da je za svako $q \in U_p$ jedan predstavnik odabrane klase ekvivalencije $X_{1q}, \ldots, X_{nq}$.

   Pokazati da je ova definicija dobra i dokazati da je mnogostrukost orijentabilna ako i samo ako postoji izbor klase orijentacije na mnogostrukosti koji neprekidno zavisi od tačaka mnogostrukosti.

3. Projektovanje Mebijusove trake na njen centralni krug je diferencijabilno raslojenje čije su fibre otvoreni intervali. Pokazati. Da li je ovo raslojenje trivijalno?

4. Neka je $T^2 \subset \mathbb{R}^3$ dvodimenzioni torus zadat standardnom parametrizacijom. Tačke p, q torusa su u relaciji ako je $q = \pm p$, ovo je relacija ekvivalencije. Tada je skup $\{[p], p \in T^2\}$ mnogostrukost sa indukovanom topologijom i naziva se **Klajnova flaša**. Pokazati da preslikavanje $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ dato sa

   $$f(x, y) = ((r \cos y + a) \cos 2x, (r \cos y + a) \sin 2x, r \sin y \cos x, r \sin y \sin x)$$

   indukuje smeštanje Klajnove flaše u $\mathbb{R}^4$.

5. Ispitati da li je sa $\{(\cos(\sqrt{2}t)(2 + \cos t), \sin(\sqrt{2}t)(2 + \cos t), \sin t) | t \in \mathbb{R}\}$ zadata podmnogostrukost $\mathbb{R}^3$.

6. Neka je distribucija D na $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, y, z), y, z \in \mathbb{R}\}$ razapeta vektorskim poljima $X = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}$, $Y = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$. Naći slike integralnih mnogostrukosti distribucije D.

Diferencijalna geometrija, domaći zadatak 3

1. Dokazati I Bjankijev identitet.

2. Neka su Γ^k_{ij} Kristofelovi simboli koneksije ∇. Tada funkcije $\overline{\Gamma}^k_{ij} = \frac{1}{2}(\Gamma^k_{ij} + \Gamma^k_{ji})$ zadovoljavaju formule promene koordinata, pa predstavljaju simbole koneksije $\overline{\nabla}$ koja je simetrična. Pri tom $\nabla_X Y = \frac{1}{2}T(X,Y) + \overline{\nabla}_X Y$. Pokazati. Uočiti da se jednačine geodezijskih linija ove dve koneksije poklapaju i zaključiti da su geodezijske linije ∇, geodezijske njenog simetričnog dela.

3. Neka su ∇_1 i ∇_2 afine koneksije mnogostrukosti M_1 i M_2 i ∇ koneksija njima indukovana na produktu $M_1 \times M_2$. Ako su γ_1 i γ_2 krive na M_1 i M_2 i X_1 i X_2 vektorska polja paralelna duž γ_1 i γ_2 tada je polje $dj_1(X_1) + dj_2(X_2)$ paralelno duž $\gamma_1 \times \gamma_2$, a važi i obrnuto, svako polje paralelno duž $\gamma_1 \times \gamma_2$ je ovog oblika. Zaključiti da su geodezijske linije na $M_1 \times M_2$ proizvodi geodezijskih na M_1 i M_2.

4. Neka je $\pi : E \to M$ vektorsko raslojenje sa koneksijom ∇ i $\pi^* : E^* \to M$ njemu dualno raslojenje (takvo da je ${\pi^*}^{-1}(p)$ dual $\pi^{-1}(p)$). Pokazati da je ∇^* data sa $({\nabla^*}_X \sigma_1^*)_p(\sigma_2) = X_p(\sigma_1^*(\sigma_2)) - \sigma_{2p}(\nabla_X \sigma_1)$, gde su X, σ_1 i σ_2, redom, sečenja tangentnog, i raslojenja (π, E, M), odnosno (π^*, E^*, M) koneksija dualnog raslojenja.

5. Neka je $f : (M, \nabla) \to (\overline{M}, \overline{\nabla})$ difeomorfizam mnogostrukosti sa koneksijama bez torzije.
   a) Za reparametrizaciju α (ne nužno linearnu) geodezijske linije na M važi $\nabla_{T_\alpha} T_\alpha = \rho(t) T_\alpha$, i obrnuto, ako tangentno polje krive zadovoljava ovu jednakost postoji njena parametrizacija koja je geodezijska. Pokazati. Ovakve krive možemo zvati **uopštene geodezijske**.
   b) Difeomorfizam f je **geodezijsko preslikavanje** ako slika uopštene geodezijske mnogostrukosti M u uopštene geodezijske mnogostrukosti $\overline{M}$. Identifikjući f povezana vektorska polja M i $\overline{M}$ neka je $P(X,Y) = \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$. Pokazati da je P simetrično i $\mathcal{F}$-bilinearno preslikavanje. Zaključiti da je $P(X,Y) = \psi(Y)X + \psi(X)Y$gde je ψ forma. Koristeći vektorska polja koordinatnog repera naći ψ.

Diferencijalna geometrija, domaći zadatak 4

1. Na helikoidu $(u\cos v, u\sin v, hv)$ data je kriva $(a\cos v, a\sin v, hv), a = const, 0 \le v \le 2\pi$. Paralelno pomeriti vektor tangentan na helikoid duž krive.

2. Neka su (M_1, g_1) i (M_2, g_2) Rimanove mnogostrukosti i $(M_1 \times M_2, g)$ njihov proizvod, sa metrikom datom sa $g(X,Y) = g_1(\pi_1(X), \pi_1(Y)) + g_2(\pi_2(X), \pi_2(Y))$.
   a) Pokazati da je koneksija proizvoda indukovana sa (M_1, ∇^1) i (M_2, ∇^2), gde su ∇^1 i ∇^2 njihove Levi-Čivita koneksije, takođe Levi-Čivita koneksija proizvoda $(M_1 \times M_2, g)$.
   b) Za svako $p \in M_1$, skup $M_{2p} = \{(p,q) \in M_1 \times M_2 | q \in M_2\}$ je podmnogostrukost $M_1 \times M_2$, difeomorfna M_2. Pokazati da je M_{2p} totalno geodezijska podmnogostrukost $M_1 \times M_2$.
   c) Neka je $\sigma(X,Y) \subset T(p,q)(M_1 \times M_2)$ ravan takva da je $\pi_{2(p,q)}(X) = 0$ i $\pi_{1(p,q)}(Y) = 0$. Pokazati da je sekciona krivina $K(\sigma) = 0$.
   d) Pokazati da je

   $$R(X,Y,Z,W) = R_1(\pi_1(X), \pi_1(Y), \pi_1(Z), \pi_1(W)) + R_2(\pi_2(X), \pi_2(Y), \pi_2(Z), \pi_2(W))$$

   gde su R, R_1 i R_2 Rimanove krivine $M_1 \times M_2$, M_1 i M_2.

3. Neka je (M, g) Rimanova mnogostrukost takva da za svake dve njene tačke p i q postoji izometrija $f_{p,q} : M \to M$ takva da $f_{p,q}(p) = q$. Da li je M kompletna mnogostrukost?

4. Kilingovo vektorsko polje X Rimanove mnogostrukosti (M, g) je konstantne norme ako i samo ako je svaka integralna kriva polja X i geodezijska. Pokazati.