Domaći zadatak 1

1. Neka je $\mathcal{M}$ prostor kvadratnih matrica dimenzije n. Pokazati da je preslikavanje $f : A \mapsto C^{-1}AC$, gde je C invertibilna matrica, difeomorfizam $\mathcal{M}$ na sebe.

2. Koriščenjem atlasa dobijenog pomoću stereografske projekcije pokazati da je antipodalno preslikavanje $i : S^2 \to S^2$, $i(x) = -x$ diferencijabilno preslikavanje koje menja orijentaciju.

3. a) Dokazati da osobina da je funkcija na mnogostrukosti glatka ne zavisi od izbora koordinata odnosno, karte diferencijabilnog atlasa.
   b) Ako je $F_{\mathcal{A}}(M)$ algebra diferencijabilnih funkcija mnogostrukosti M sa diferencijabilnim atlasom $\mathcal{A}$, pokazati da važi $F_{\mathcal{A}}(M) = F_{\mathcal{B}}(M)$ ako i samo ako su atlasi $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ ekvivalentni.

4. Neka je torus T^2 dobijen rotacijom kruga $(x-a)^2 + z^2 = b^2, |a| > |b|$ u ravni Oxz oko z-ose. Pokazati da su koordinatne funkcije x, y, z na torusu glatke.

5. Neka je $\mathbb{R}P^2$ predstavljen pravama koje sadrže koordinatni početak u prostoru $\mathbb{R}^3$. Preslikavanje $f : S^2 \to \mathbb{R}P^2$ pridružuje tački $p \in S^2$ pravu koja sadrži p. Pokazati da je f glatko preslikavanje.

6. Neka je $M \times N$ produkt dve diferencijabilne mnogsostrukosti i $\pi_M : M \times N \to M$, $\pi_N : M \times N \to N$ kanonske projekcije na M i N. Dato je preslikavanje $\pi : T_{(p,q)}(M \times N) \to T_pM \times T_qN$ sa $\pi(X) = (d\pi_{M(p,q)}(X), d\pi_{N(p,q)}(X))$. Ovo preslikavanje je izomorfizam vektorskih prostora. Njegov inverz je $\pi^{-1}(X_1, X_2) = dj_{1p}X_1 + dj_{2q}X_2$ gde su $j_1 : M \to M \times N$, $j_2 : N \to M \times N$ dati sa $j_1(t) = (t, q), j_2(t) = (p, t)$.

7. Data je trodimenziona sfera $S^3 \subset \mathbb{R}^4$. Identifikujući $\mathbb{R}^4$ i $\mathbb{C}^2$, S^3 možemo zadati kao skup $\{(z, w) |\ |z|^2 + |w|^2 = 1\}$. Dato je preslikavanje $f : S^3 \to S^2$ sa $f(z, w) = (z\overline{w} + w\overline{z}, iw\overline{z} - iz\overline{w}, z\overline{z} - w\overline{w})$. Pokazati da je f glatko preslikavanje.

8. Neka je $f : M_1 \to M_2$ lokalni difeomorfizam diferencijabilnih mnogostrukosti. Ako je M_2 orijentabilna dokazati da je i M_1 orijentabilna.

Domaći zadatak 2

1. Na prostoru $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ data su vektorska polja $X = -(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z})$ i a) $Y = \frac{\partial}{\partial y}$ b) $Y = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$. Izračunati $[X, Y]$.

2. Neka je $\mathcal{M} \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ prostor n-dimenzionih realnih matrica. Vektorsko polje V_a na $\mathcal{M}$ definisano je sa $V_a(x) = a \cdot x, \quad a, x \in \mathcal{M}$. Izračunati $[V_a, V_b]$.

3. Neka je $B = \{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ globalni pokretni reper na prostoru $\mathbb{R}^m$ i neka su X i Y dva glatka vektorska polja data sa $X = \sum_{i=1}^m \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $Y = \sum_{i=1}^m \beta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Izraziti vektorsko polje $[X, Y]$ u bazi B.

4. Neka je $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ data sa $f(x, y, z) = (x^2 y, y \sin z) = (u, v)$. Na prostoru $\mathbb{R}^2$ dato je kovektorsko polje $\sigma = udv + vdu$. Odrediti $df^*(\sigma)$.

5. M je diferencijabilna mnogostrukost i $f \in \mathcal{F}(M)$. Izračunati df.
   a) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$, $f(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$.
   b) $M = S^2 \subset \mathbb{R}^3$, f je z-koordinatna funkcija.
   c) $M = \mathbb{R}^n$, $f(x) = |x|^2$.

6. Neka su M i N diferencijabilne mnogostrukosti, $\pi_M : M \times N \to M$i $\pi_N : M \times N \to N$ kanonske projekcije, a $\pi_{M_*} : T(M \times N) \to TM$ i $\pi_{N_*} : T(M \times N) \to TN$ njima indukovana preslikavanja tangentnih raslojenja. Pokazati da je preslikavanje $\pi_{M_*} \times \pi_{N_*} : T(M \times N) \to TM \times TN$ difeomorfizam.

7. Proizvod dve paralelizabilne mnogostrukosti je paralelizabilna mnogostrukost. Pokazati.

8. Konstruisati jedan pokretni reper na torusu T^2.

Domaći zadatak 3

1. Dato je preslikavanje $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ sa $f(x, y, z) = (x + xy, x + xz, x + yz, xyz)$. Naći rang preslikavanja u tački $p(1, 0, 1)$. Odrediti slike pri preslikavanju df_p lokalnih koordinatnih vektora i vektora $y^2(\frac{\partial}{\partial x})_p + xz(\frac{\partial}{\partial y})_p$.

2. Neka je $T^n \subset \mathbb{R}^{2n}$ uopšteni torus dat jednačinama $x_1^2 + x_2^2 = \dfrac{1}{n}, \dots, x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2 = \dfrac{1}{n}$. Pokazati da je T^n podmnogostrukost sfere S^{2n}.

3. Neka je N podmnogostrukost mnogostrukosti M. Da li je TN podmnogostrukost od TM?

4. Dato je preslikavanje $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ sa $f(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$. S obzirom da je $f(p) = f(-p)$, $f|_{S^2}$ idukuje preslikavanje iz $\mathbb{R}P^2$ u $\mathbb{R}^4$. Pokazati da je to preslikavanje ulaganje.

5. Ako su A i B redom, podmnogostrukosti od M i N pokazati da je $A \times B$ podmnogostrukost od $M \times N$.

6. Data su vektorska polja $X = y^2 \dfrac{\partial}{\partial x}$ i $Y = x^2 \dfrac{\partial}{\partial y}$ na $\mathbb{R}^2$. Pokazati da su polja X i Y kompletna, a da polje $X + Y$ nije.

Domaći zadatak 4

1. Neka su ∇_1 i ∇_2 linearne koneksije diferencijabilne mnogostrukosti M i $f \in \mathcal{F}(M)$. Dokazati da je tada i $f\nabla_1 + (1-f)\nabla_2$ takodje koneksija na M.

2. Pokazati da su preslikavanja $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}, a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1$, izometrije hiperboličke poluravni.

3. Odrediti geodezijske linije u Poenkareovom disk modelu D^2.

4. Data je tačka $p = (0, 1)$ u hiperboličkoj poluravni H^2. Eksplicitno odrediti preslikavanje exp_p.

5. Neka je M rotaciona dvodimenziona podmnogostrukost prostora $\mathbb{R}^3$.
a) Pokazati da su meridijani geodezijske linije.
b) Odrediti paralele koje su geodezijske linije.
c) Ako je γ geodezijska na M, ona sa paralelom u tački $\gamma(t)$ zaklapa ugao $\beta(t)$. Odrediti $\beta(t)$.
d) Ako je r udaljenost tačke od ose rotacije, pokazati da je $r\cos\beta$ konstantno duž krive γ.

6. Neka je (M, g) dvodimenziona mnogostrukost i (ρ, φ) polarne koordinate u T_pM. Tada u preslikavanju exp_p^{-1} one indukuju **geodezijske koordinate** (r, ϕ) u okolini tačke $p \in M$.
a) Pokazati da je metrika u geodezijskim koordinatama u sledećem obliku $ds^2 = dr^2 + Gd\phi^2$.
b) Pokazati da su ne-nula Kristofelovi simboli u ovoj karti $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \dfrac{1}{2G}\dfrac{\partial G}{\partial r}$, $\Gamma^1_{22} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial G}{\partial r}$.
c) Pokazati da je koordinatna linija $\phi = const$ geodezijska kroz tačku p.
d) Pokazati da je koordinatna linija $r = const$ skup tačaka na površi podjednako udaljenih od p, a zove se **geodezijski krug**.
e) Pokazati da je

$$\lim_{r\to 0} G = 0, \quad \lim_{r\to 0} \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r} = 1, \quad \lim_{r\to 0} -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} = K_p,$$

gde je K_p sekciona krivina u tački p.
f) Neka je $l(r)$ obim geodezijskog kruga. Pokazati da je

$$\lim_{r\to 0} \frac{2\pi r - l(r)}{r^3} = \frac{\pi}{3}K_p.$$