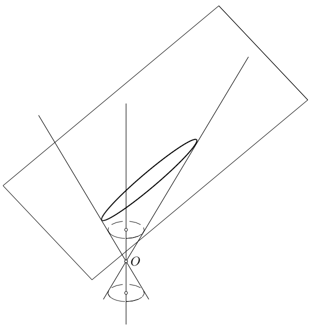
7. Конусни пресеци у еуклидској и афиној равни

Нека су s и p две праве у еуклидском простору $\mathbb{R}^3$ које се секу у тачки O. Скуп свих слика тачака праве p у ротацијама око праве s је **кружни конус**.



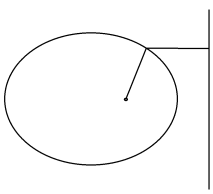
Права s је његова **оса**, а слике праве p су његове **изводнице**. Нека је π раван простора. Ако раван π садржи тачку O, њен пресек са конусом је или сама та тачка, или се раван и конус додирују по изводници, или раван сече конус по две изводнице.

Ове скупове (тачку, праву или две праве које се секу) називамо **дегенерисаним конусним пресецима**.

Остали конусни пресеци су **недегенерисани** или **конике**. Ако је раван управна на оси s и не садржи тачку O, пресек конуса и равни је круг.

Теорема

Нека је $\mathcal{K}$ коника у равни π који није круг. Тада постоје права d и тачка F те равни такве да је однос одстојања произвољне тачке конике $\mathcal{K}$ од тачке F и праве d константан. **БД**

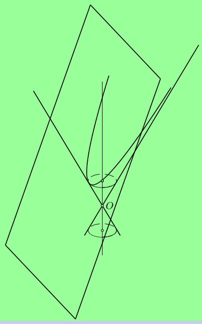


Дефиниција

Тачку F називамо **жижом** или **фокусом** конике, а праву d **директрисом**. Однос растојања тачке X конике од жиже и директрисе је **ексцентрицитет** конике.

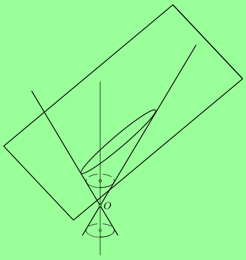
Примедба *Важи и обрнуто. Ако су d и F права и тачка у равни која јој не припада и $\mathcal{K}$ скуп тачака те равни таквих да је однос њихових одстојања од F и d константан, онда постоји кружни конус који сече дату раван по скупу $\mathcal{K}$.*

Пример



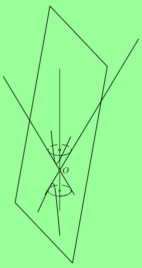
Може се показати да је ексцентрицитет конике 1 ако и само ако је раван π паралелна једној изводници конуса. Ту конику називамо **параболом**.

Пример



За ексцентрицитет важи $e < 1$ ако и само ако раван π сече све изводнице конуса са исте стране равни α, а одговарајућу конику $\mathcal{K}$ називамо **елипсом**.

Пример



Важи да је $e > 1$ ако и само ако раван π сече изводнице у тачкама које се налазе са разних страна α, а дату конику зовемо **хиперболом.**

Примедба *Кад се угао између π и осе s приближава правом, односно када је елипса тежи кругу, директриса елипсе се све више, неограничено, удаљава. Зато можемо сматрати да је директриса круга бесконачно далека права, да је ексцентрицитет круга $e = 0$, а сам круг специјалан случај елипсе.*

Примедба *У случају елипсе и хиперболе постоје два пара (F, d) где је F жижа, а d одговарајућа директриса. У случају параболе постоји само један такав пар (F, d).*

Тврђење

Недегенерисани конусни пресек $\mathcal{K}$ је у ортонормираном Декартовом систему дат квадратном једначином. **БД**

Примедба *Скуп тачака равни чије координате задовољавају једначину $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0$, где је $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$ је* **крива другог реда**. *Може се показати да је произвољна крива другог реда или конусни пресек, или унија две паралелне праве или празан скуп.*

Криву другог реда можемо записати и у следећем облику

$$X^t A X + X^t B + C = 0, \tag{1}$$

где су A и B редом квадратна, симетрична матрица и колона дате са

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

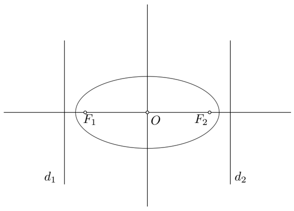
Изометријска трансформација слика конику $\mathcal{K}$, жижу и директрису у другу конику и одговарајуће жижу и директрису. При том, $\mathcal{K}$ и њена слика имају исти ексцентрицитет.

Постоји изометријска трансформација која слика $\mathcal{K}$ у неку конику $\mathcal{K}'$ чија једначина има, у извесном смислу, најједноставнији облик. То подразумева да једначина нема "мешовити" члан $x \cdot y$ и да је линеарни део једначине сведен на најкраћи облик.

Једначина конике $\mathcal{K}'$ назива се **канонском једначином** конике $\mathcal{K}$. Може се показати да за сваку конику постоји тачно једна канонска једначина. Све конике које имају исти канонски облик су изометричне истој коници $\mathcal{K}'$, па су и међусобно изометричне.

Елипса.

За $e < 1$, **канонска једначина елипсе** је



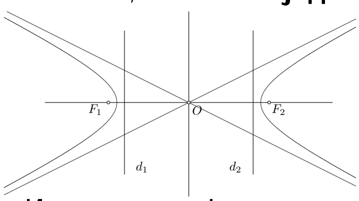
$$\frac{x_1''^2}{a^2} + \frac{x_2''^2}{b^2} = 1, a > b > 0.$$

a и b су **полуосе**. Тачка $(0, 0)$ је **центар**

Видимо да трансформације $x_1'' \mapsto -x_1'', x_2'' \mapsto x_2''$ и $x_1'' \mapsto x_1'', x_2'' \mapsto -x_2''$ сликају $\mathcal{K}'$ у себе, па је $\mathcal{K}'$ симетрична у односу на осе $x_1'' = 0$ и $x_2'' = 0$. Зато је $\mathcal{K}'$ и централносиметрична у односу на $(0, 0)$, односно центар.
Ако означимо $a^2 - b^2 = c^2$, парови жижа и директриса дати су са $(c, 0)$ и $x_1'' = a^2/c$, односно $(-c, 0)$ и $x_1'' = -a^2/c$.

Хипербола.

За $e > 1$, **канонска једначина хиперболе** је



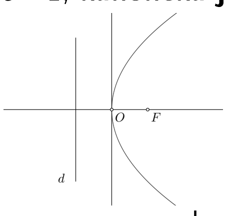
$$\frac{x_1''^2}{a^2} - \frac{x_2''^2}{b^2} = 1, \ a, b > 0.$$

a и b су **полуосе**. Тачка $(0, 0)$ је **центар**

И ова коника је симетрична у односу на осе, па и централносиметрична у односу на центар.
Ако означимо $a^2 + b^2 = c^2$, жиже су $F_{1,2}(\pm c, 0)$, док су њима одговарајуће директрисе дате једначинама $x_1'' = \pm\frac{a^2}{c}$.
Праве дате једначинама $\frac{x_1''}{a} \pm \frac{x_2''}{b} = 0$ су **асимптоте** хиперболе.

Парабола.

За $e = 1$, **канонска једначина параболе** је



$$x_2''^2 = 2px_1'', \ p > 0.$$

а права $x_2'' = 0$ је **оса**.

Видимо да трансформација $x_1'' \mapsto x_1'', x_2'' \mapsto -x_2''$ слика $\mathcal{K}'$ у себе, па је $\mathcal{K}'$ симетрична у односу на x_1''-осу, тј. праву $x_2'' = 0$.
При том су жижа и њена директриса дате са $(p/2, 0)$ и $x_1'' + p/2 = 0$.

Примедба *Недегенерисани конусни пресек је елипса или круг уколико матрица A има сопствене вредности истог знака, тј.* $\det A > 0$*, хипербола уколико су различитог знака, тј.* $\det A < 0$ *и парабола уколико је једна сопствена вредност* 0*, тј.* $\det A = 0$.

Дакле, закључили смо и

Теорема

Две недегенерисане конике међусобно су изометричне ако и само ако имају исти канонски облик.

Важи и следеће тврђење.

Тврђење

а) Постоји сличност која пресликава једну елипсу (хиперболу) у другу ако и само ако имају исти ексцентрицитет.
б) Сваке две параболе су сличне.

Доказ. а) Ако су две конике $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ сличне тада имају и исти однос растојања својих тачака од жиже и директрисе, а самим тим и исти ексцентрицитет.
Обратно, нека имају исти ексцентрицитет. Тада су, између осталог и истог типа (или су обе елипсе или обе хиперболе или обе параболе). Нека су, у прва два случаја, њима изометричне конике са канонским једначинама дате са
$\mathcal{K}_i' : \frac{x_1^2}{a_i^2} \pm \frac{x_2^2}{b_i^2} = 1, i = 1, 2.$

С обзиром да имају исте ексцентрицитете, важи и да је $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$.
Тада хомотетија $\mathcal{H}_{0,a_2/a_1}$ слика $\mathcal{K}_2'$ у $\mathcal{K}_1'$, те су оне сличне, а самим тим и $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$.
Уколико су конике параболе $\mathcal{K}_i' : x_2^2 = 2p_i x_1, i = 1, 2$, директно следи да хомотетија $\mathcal{H}_{0,p_2/p_1}$ слика $\mathcal{K}_2'$ у $\mathcal{K}_1'$.
б) Ова тачка је директна последица претходне у случају $e = 1$. $\square$

Видели смо да су еуклидска права, раван и простор уједно и афини реални простори димензија 1, 2 и 3.
Тиме су и конике еуклидске равни уједно и објекти у афиној равни, те је интересантно питање како их трансформише група афиних трансформација $Aff(\mathcal{A}^2)$.
Сетимо се да је коника, уједно крива другог реда, описана квадратном једначином

$$X^t AX + BX + C = 0, \quad \text{где је } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Нека је σ афина трансформација равни. Њен инверз σ^{-1} је дат формулама $X = QX' + D$. Тада се крива другог реда пресликава у скуп тачака дат једначином

$$\begin{aligned} 0 &= (X'^t Q^t + D)A(QX' + D) + B(QX' + D) + C \\ &= X'^t Q^t AQX' + B_1 X' + C_1. \end{aligned}$$

Дакле, крива другог реда се пресликава у криву другог реда. При том, ако је крива $\mathcal{K}$ дегенерисана, нпр. скуп тачака две праве које се секу, с обзиром да афине трансформације сликају колинеарне тачке у колинеарне, крива $\mathcal{K}$ се слика у дегенерисану криву другог реда истог типа.
Самим тим се и конике сликају у конике. При том, сетимо се да је тип конике одређен знаком $\det A$. Слика конике има матрицу $A_1 = Q^t AQ$ која одговара квадратном делу једначине.

Тада је

$$\det A_1 = \det Q^t \det A \det Q = \det A (\det Q)^2,$$

те су $\det A_1$ и $\det A$ истог знака. Зато важи следеће тврђење.

Тврђење

Афина трансформација равни слика елипсе, параболе и хиперболе, редом у елипсе, параболе и хиперболе.

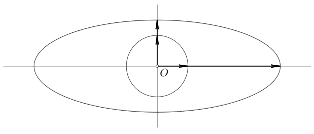
Дакле, две конике различитог типа нису афино еквивалентне. Покажимо да су конике истог типа међусобно афино еквивалентне.

Теорема

Сваке две елипсе (параболе, односно хиперболе) су афино еквивалентне.

Доказ. С обзиром да су сваке две параболе сличне директно следи и да су афино еквивалентне.

Покажимо да је свака елипса $\mathcal{K}$ афино еквивалентна јединичном кругу.
С обзиром да је $\mathcal{K}$ изометрична елипси $\mathcal{K}'$ са канонском једначином $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$, довољно је наћи афино пресликавање које елипсу $\mathcal{K}'$ слика у круг $k : x_1^2 + x_2^2 = 1$.



Уопштена хомотетија $\mathcal{H}_{O,1/a,1/b}$, по правцима редом, x_1 и x_2-осе има формуле

$$\mathcal{H}_{O,1/a,1/b} : \quad x_1' = \frac{x_1}{a}, \qquad x_2' = \frac{x_2}{b}$$

и пресликава $\mathcal{K}'$ у k.
Слично, иста хомотетија пресликава хиперболу дату једначином $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$ у хиперболу $x_1^2 - x_2^2 = 1$, па можемо закључити и да су сваке две хиперболе афино еквивалентне.

□