2. Аксиоме распореда

Друга група аксиома су аксиоме **распореда**, има их 6. Оне описују један од основних појмова, трочлану релацију $\mathcal{B}$. Називамо је релацијом **између**, а $\mathcal{B}(A, B, C)$ читамо: "тачка B је између тачака A и C".

II1: Ако је $\mathcal{B}(A, B, C)$ онда су A, B, C три разне колинеарне тачке.

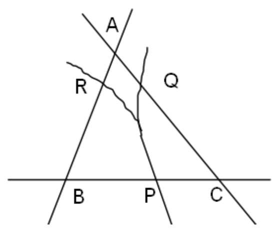
II2: Ако је $\mathcal{B}(A, B, C)$ онда је и $\mathcal{B}(C, B, A)$.

II3: Ако је $\mathcal{B}(A, B, C)$ онда није $\mathcal{B}(A, C, B)$.

II4: Ако су A и B две разне тачке, онда постоји тачка C таква да је $\mathcal{B}(A, B, C)$.

II5: Ако су A, B, C три разне колинеарне тачке, тада важи бар једна од релација $\mathcal{B}(A, B, C)$, $\mathcal{B}(B, C, A)$, $\mathcal{B}(C, A, B)$.

II6:(Пашова аксиома) Ако су A, B, C три неколинеарне тачке и p права која припада равни њима одређеној, не садржи тачку A и сече праву BC у тачки P таквој да је $\mathcal{B}(B, P, C)$, онда важи бар један од исказа:



-p сече праву CA у тачки Q т.д. је $\mathcal{B}(C, Q, A)$,
-p сече праву AB у тачки R т.д. је $\mathcal{B}(A, R, B)$.

Уочимо да на основу II4 за две дате тачке A и B, постоји C_1 "иза" B, затим, иза B и C_1 постоји C_2, ... Дакле, сада већ постооји бесконачно много тачака, а процес је пребројивог карактера.

Теорема (2.1)

Ако су A, B, C три разне колинеарне тачке онда важи тачно једна од релација $\mathcal{B}(A, B, C)$, $\mathcal{B}(B, C, A)$, $\mathcal{B}(C, A, B)$.

Доказ. На основу $I_{I}5$ важи бар једна од датих релација, можемо претпоставити да је нпр. $\mathcal{B}(A, B, C)$.
Покажимо да тада не важе преостале две релације.
Тада, због $I_{I}3$ није $\mathcal{B}(A, C, B)$, а затим, због $I_{I}2$, није ни $\mathcal{B}(B, C, A)$.
Претпоставимо да важи и $\mathcal{B}(C, A, B)$. Тада, на основу $I_{I}3$ није $\mathcal{B}(C, B, A)$, па због $I_{I}2$ није $\mathcal{B}(A, B, C)$. $\lightning$ $\square$

Карактеризација неког појма је услов еквивалентан његовој дефиницији, тј. неопходан и довољан услов који треба важи да би се радило о траженом појму.

Пеанови ставови су карактеризације тачака праве, равни и простора.

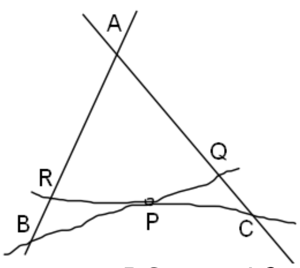
Теорема (2.2 Први Пеанов став)

Ако су A и B две разне тачке, тада тачка X припада правој AB акко се поклапа са A или B или важи нека од три релације $\mathcal{B}(A, B, X)$, $\mathcal{B}(A, X, B)$, $\mathcal{B}(X, A, B)$. **БД**

Теорема (2.3)

Ако су A, B, C три неколинеарне тачке и P, Q, R такве да важи $\mathcal{B}(B, P, C)$, $\mathcal{B}(C, Q, A)$, $\mathcal{B}(A, R, B)$, онда су P, Q, R неколинеарне тачке.

Доказ. ППС (претпоставимо супротно). Нека су P, Q, R колинеарне. Није тешко показати да су P, Q, R разне тачке. Зато постоји распоред међу њима, нпр. нека је $\mathcal{B}(R, P, Q)$. Лако се показује и да су A, R, Q неколинеарне.



Посматрајмо тројку неколинеарних тачака A, R, Q и праву BC. Она сече RQ у тачки P т.д. $\mathcal{B}(R, P, Q)$, па би на основу Пашове аксиоме требало да сече AQ у тачки између A и Q или да сече AR у тачки између A и R.

Међутим BC сече AQ у C и $\neg\mathcal{B}(A, C, Q)$ и сече AR у B и $\neg\mathcal{B}(A, B, R)$. $\lightning$ $\square$

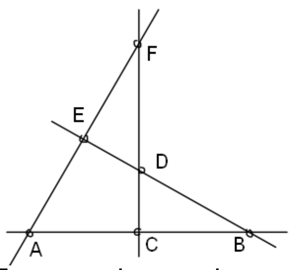
Теорема

Ако су A, B, C три неколинеарне тачке и p права која припада равни њима одређеној, не садржи тачку A и сече праву BC у тачки P таквој да је $\mathcal{B}(B, P, C)$, онда важи тачно један од исказа: -p сече праву CA у тачки Q т.д. је $\mathcal{B}(C, Q, A)$,
-p сече праву AB у тачки R т.д. је $\mathcal{B}(A, R, B)$. **БД**

Теорема (2.4)

Ако су A и B две разне тачке тада постоји тачка C таква да важи $\mathcal{B}(A, C, B)$.

Доказ.



С обзиром да постоје неколинеарне тачке, постоји тачка D која не припада правој AB. Како је $B \neq D$, на основу $II4$ постоји E т.д. $\mathcal{B}(B, D, E)$. Слично за $A \neq E$ поостоји тачка F т.д.$\mathcal{B}(A, E, F)$.

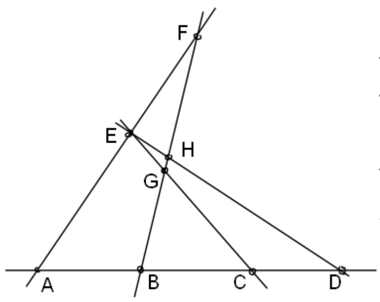
Посматрајмо тројку неколинеарних тачака A, B, E и праву FD. FD сече EB у тачки D т.д. $\mathcal{B}(B, D, E)$. При том сече AE у тачки F т.д. $\neg\mathcal{B}(A, F, E)$. Зато, на основу Пашове аксиоме FD сече AB у некој тачки C т.д. $\mathcal{B}(A, C, B)$. □

Сада, између A и B постоји C_1, између A и C_1 постоји C_2,... добијамо пребројив скуп тачака, "свуда густ".

Теорема

Ако је $\mathcal{B}(A, B, C)$ и $\mathcal{B}(B, C, D)$ онда је и $\mathcal{B}(A, B, D)$.

Доказ.



С обзиром на распореде који важе, тачке A и D припадају правој BC те су све четири тачке колинеарне. Постоји тачка E која не припада тој правој и тачка F таква да важи $\mathcal{B}(A, E, F)$.

Прво, посматрајмо тројку неколинеарних тачака A, C, E и праву FB. FB сече AC у тачки B т.д. $\mathcal{B}(A, B, C)$.

При том, сече AE у F т.д. $\neg\mathcal{B}(A, F, E)$. На основу Пашове аксиоме тада FB сече EC у тачки G т.д. $\mathcal{B}(E, G, C)$.
Посматрајмо тројку неколинеарних тачака E, C, D и праву FB. FB сече EC у тачки G т.д. $\mathcal{B}(E, G, C)$ и при том сече CD у тачки B т.д. $\neg\mathcal{B}(C, B, D)$. Зато FB сече ED у тачки H т.д. $\mathcal{B}(E, H, D)$.
Посматрајмо тројку неколинеарних тачака A, D, E и праву FB. Права FB сече ED у тачки H т.д. $\mathcal{B}(E, H, D)$ и при том сече AE у F т.д. $\neg\mathcal{B}(A, F, E)$. Зато, FB сече AD у тачки између A и D, а при том већ имамо да AD сече FB у B, Стога важи $\mathcal{B}(A, B, D)$. □

Дефиниција

Коначан скуп колинеарних тачака $A_1, \dots, A_n, n \geq 3$ је **линеарно уређен**, пишемо $\mathcal{B}(A_1, A_2, \dots, A_n)$ ако важи $\mathcal{B}(A_i, A_j, A_k)$, $1 \leq i < j < k \leq n$.

Теорема (2.5)

Ако је $\mathcal{B}(A, B, C)$ и $\mathcal{B}(B, C, D)$ онда је $\mathcal{B}(A, B, C, D)$

Доказ. По дефиницији треба да важи $\mathcal{B}(A, B, C)$, $\mathcal{B}(A, B, D)$, $\mathcal{B}(A, C, D)$ и $\mathcal{B}(B, C, D)$. Два распореда су дата по претпоставци, а да тада важи и $\mathcal{B}(A, B, D)$ смо доказали. Распоред $\mathcal{B}(A, C, D)$ се слично доказује. □

Слично можемо показати:

Т. $\mathcal{B}(A, B, C)$ и $\mathcal{B}(A, C, D) \Rightarrow \mathcal{B}(A, B, C, D)$;

Т. $\mathcal{B}(A, B, C)$, $\mathcal{B}(A, B, D)$ и $C \neq D \Rightarrow \mathcal{B}(A, B, C, D)$ или $\mathcal{B}(A, B, D, C)$;

Т. $\mathcal{B}(A, C, B)$, $\mathcal{B}(A, D, B)$ и $C \neq D \Rightarrow \mathcal{B}(A, D, C, B)$ или $\mathcal{B}(A, C, D, B)$.