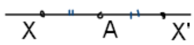
16. Рефлексије

У овој лекцији бавићемо се рефлексијама, посебном врстом изометријских трансформација, које су генератори групе изометрија.

Теорема

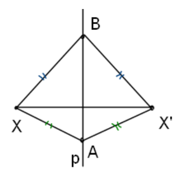
Постоји јединствена неидентичка изометрија праве/равни/простора која има инваријантну 1/бар 2/ бар 3 неколинеарне тачке.

Доказ. Изометрија праве. Нека је $\mathcal{I}: p \to p$ и нека је $\mathcal{I}(A) = A$. Како је $(X, A) \cong (X', A)$ на свакој полуправој праве p са теменом A постоји јединствена тачка која испуњава овај услов, једна од њих је тачка X. Ако је $X' = X$, $\mathcal{I}$ има бар две фиксне тачке па је $\mathcal{I} = \mathcal{E}_p$, $\lightning$.



Зато је $X' \neq X$ и X' је тачка таква да је $\mathcal{B}(X, A, X')$ и $XA \cong X'A$. Овим је на јединствен начин одређено пресликавање $\mathcal{I}: p \to p$ које је при том и изометријска трансформација. При том је A средиште XX'.

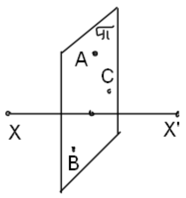
Изометрија равни. Нека је $\mathcal{I}: A, B \mapsto A, B$. Тада је права AB инваријантна за $\mathcal{I}$, а трансформација $\mathcal{I}|_{AB}$ је изометрија праве са бар две фиксне тачке тј. $\mathcal{I}|_{AB} = \mathcal{E}_{AB}$, па су све тачке праве $p = AB$ фиксне.



Нека је $X \notin p$ и $\mathcal{I}(X) = X'$. Тада је $(X, A, B) \cong (X', A, B)$ па у свакој полуравни са рубом AB постоји јединствена тачка која испуњава овај услов. Једна од њих је тачка X. Ако би било $X' = X$ онда би $\mathcal{I}$ имала бар 3 неколинеарне фиксне тачке па би било $\mathcal{I} = \mathcal{E}$ ($\lightning$). Зато је X' т.д. је $X, X' \div p$.

Овим је на јединствен начин одређено пресликавање $\mathcal{I}$ које је при том и изометрија. Уочимо: $XA \cong X'A \Rightarrow A$ припада медијатриси дужи XX', а слично важи и за B. Дакле p је медијатриса дужи XX'.

Изометрија простора. Нека $\mathcal{I} : A, B, C \mapsto A, B, C$ где су A, B, C неколинеарне тачке. Оне одређују раван π. Тада је $\mathcal{I}|_\pi$ изометрија равни π са бар три неколинеарне фиксне тачке, па је $\mathcal{I}|_\pi = \mathcal{E}_\pi$, тј. све тачке равни π су фиксне.



Нека је $X \notin \pi$ и $\mathcal{I}(X) = X'$. Тада је $(A, B, C, X) \cong (A, B, C, X')$ па у сваком полупростору са рубом π постоји тачно једна таква тачка, а једна од њих је X. Ако би било $X = X'$ тада би $\mathcal{I}$ имала четири некомпланарне фиксне тачке па би било $\mathcal{I} = \mathcal{E}$ ($\lightning$). Зато је X' т.д. $X, X' \div \pi$.

Овим је на јединствен начин одређено пресликавање простора које је и изометрија. При том из $XA \cong X'A$ следи да A припада медијалној равни дужи XX'. Слично важи и за B и C. Дакле π је медијална раван XX'. □

Дефиниција

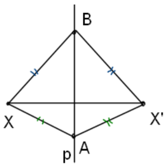
Ове изометрије називамо **централном рефлексијом праве** $\mathcal{S}_A$, **осном рефлексијом равни** $\mathcal{S}_p$, **раванском рефлексијом простора** $\mathcal{S}_\pi$. A, p, π су основице тих рефлексија.

Примедба *Видели смо да је тачка фиксна за рефлексију акко је инцидентна са њеном основицом.*

Теорема (15.1-2)

Свака рефлексија је индиректна изометрија и инволуција ($\mathcal{S}_\sigma^2 = \mathcal{E}$).

Доказ. Докажимо за осне рефлексије. Користимо ознаке из претходне теореме.

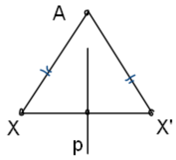


$\mathcal{S}_p(\triangle ABX) = \triangle ABX'$. Како је $\triangle ABX \rightleftarrows \triangle ABX'$, следи да је $\mathcal{S}_p$ индиректна трансформација. Нека је $\mathcal{I}(X') = X_1$. Тада је $(A, B, X') \cong (A, B, X_1)$ и с обзиром да $X' \notin p$ важи и $X' \neq X_1$, па је $X_1 = X$. Зато $\mathcal{S}_p^2$ има фиксне неколинеарне тачке A, B, X, па је $\mathcal{S}_p^2 = \mathcal{E}$. Дакле $S_p^{-1} = S_p$. □

Теорема (15.3/4/5)

Свака индиректна изометрија праве/равни/простора са __/бар једном/бар две инваријантне тачке је рефлексија.

Доказ. Покажимо за изомтерију равни. Нека је $\mathcal{I}(A) = A$, $\mathcal{I}$ индиректна. Тада је $\mathcal{I} \neq \mathcal{E}$ па постоји тачка X т.д. $\mathcal{I}(X) = X' \neq X$. Нека је p медијатриса XX'.



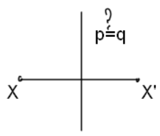
С обзиром да је $(A,X) \cong (A,X')$ следи да $A \in p$. Важи $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I} : A, X \mapsto A, X$, па је $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}$ или коинциденција или осна рефлексија. Како су и $\mathcal{I}$ и $\mathcal{S}_p$ индиректне $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}$ је директна. Зато

$$\begin{aligned} S_p \backslash \quad & S_p \circ \mathcal{I} = \mathcal{E}, \\ & S_p^2 \circ \mathcal{I} = S_p \quad \Rightarrow \quad \mathcal{I} = S_p. \end{aligned}$$ □

Теорема (15.6)

Нека су $\mathcal{S}_\Sigma$ и $\mathcal{S}_\Pi$ две рефлексије, $\Sigma \neq \Pi$. Тада је тачка X фиксна за $\mathcal{S}_\Sigma \circ \mathcal{S}_\Pi$ акко је инцидентна и са Σ и са Π.

Доказ. Докажимо за осне рефлексије. Нека је $p \neq q$. Ако $X \in p \cap q$ тривијално је и $S_q \circ S_p(X) = X$.

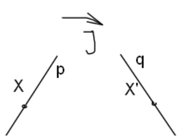


Обратно, нека је $S_q \circ S_p(X) = X$ (*). Претпоставимо да $X \notin p$. Тада је $S_p(X) = X' \neq X$, а затим $S_q(X') = X$. Зато је p, а затим и q медијатриса XX' па је $p = q$. ↯
Значи $X \in p$, а директно је из (*) $S_q(X) = X$, па $X \in q$. □

Теорема (15.7)

(Теорема о трансмутацији) Нека је $\mathcal{S}_\Sigma$ рефлексија, $\mathcal{I}$ изометрија и $\mathcal{I}(\Sigma) = \Pi$. Тада је $\mathcal{I} \circ \mathcal{S}_\Sigma \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{S}_\Pi$.

Доказ. Докажимо за изометрије равни. Нека је $\mathcal{I}(p) = q$ и нека је $X' \in q$ произвољна. Тада постоји $X \in p$ т.д. $\mathcal{I}(X) = X'$, тј. $\mathcal{I}^{-1}(X') = X$.



Тада $\mathcal{I} \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}^{-1}(X') = \mathcal{I} \circ \mathcal{S}_p(X) = \mathcal{I}(X) = X'$, па је X' фиксна за ову композицију. При том је $\mathcal{I} \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}^{-1}$ индиректна. Зато је $\mathcal{I} \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}^{-1}$ нека осна рефлексија $\mathcal{S}_{q'}$ и важи $\mathcal{S}_{q'}(X') = X'$, тј. $X' \in q'$. Како је $X' \in q$ произвољна, следи $q' = q$. □

Теорема (15.8)

Важи $\mathcal{S}_\Sigma \circ \mathcal{S}_\Pi = \mathcal{S}_\Pi \circ \mathcal{S}_\Sigma$ акко је $\Sigma = \Pi$ или $\Sigma \perp \Pi$.

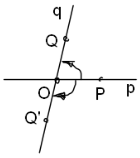
Доказ. Докажимо за изометрије равни.

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_p \backslash \quad & \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \quad \Leftrightarrow \\ & \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = (\mathcal{S}_p^2) \circ \mathcal{S}_q = \mathcal{S}_q \quad \Leftrightarrow \\ (\mathcal{S}_p^{-1} = \mathcal{S}_p, \mathit{teorema\ o\ trans.}) \quad & \mathcal{S}_{\mathcal{S}_p(q)} = \mathcal{S}_q \quad \Leftrightarrow \\ & \mathcal{S}_p(q) = q. \end{aligned}$$

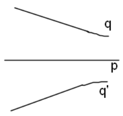
Дакле $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \Leftrightarrow \mathcal{S}_p(q) = q$. Испитајмо када је $\mathcal{S}_p(q) = q$.

1) Ако је $p = q$ тада $\mathcal{S}_p(q) = q$ тривијално важи.

2) Нека је $p \cap q = \{O\}$ и $P \in p$, $Q \in q$, $P, Q \neq O$.



Тада $\mathcal{S}_p : P, O, Q \mapsto P, O, Q'$ и $\angle POQ \mapsto \angle POQ'$, па је $\angle POQ \cong \angle POQ'$ (*). Тада је $\mathcal{S}_p(q) = q$ акко $Q' \in q$ тј. акко су подударни углови (*) уједно и напоредни, тј. прави. Дакле у овом случају $\mathcal{S}_p(q) = q \Leftrightarrow p \perp q$.



3) Нека је $p \cap q = \varnothing$. Тада је q у једној полуравни са рубом p, а $q' = \mathcal{S}_p(q)$ у комплементној полуравни, па је $q' \neq q$.

Дакле $\mathcal{S}_p(q) = q \Leftrightarrow p = q \vee p \perp q$. □

Теорема (15.9/10/11)

Свака изометрија праве/равни/простора може се представити као композиција највише 2/3/4 рефлексије.

Доказ. Покажимо за изометрију равни $\mathcal{I}$. Нека су A, B, C три неколинеарне тачке.

Ако је $\mathcal{I}(A) = A$, $\mathcal{I}(B) = B$, $\mathcal{I}(C) = C$ онда је $\mathcal{I} = \mathcal{E} = \mathcal{S}_p^2$.

Ако то није случај, нпр. $\mathcal{I}(A) = A_1 \neq A$, нека је p медијатриса AA_1. Тада $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}(A) = A$.

Ако $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}(B) = B$, $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}(C) = C$, онда $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}$ има три неколинеарне фиксне тачке па је $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I} = \mathcal{E}$, а затим $\mathcal{I} = \mathcal{S}_p$.

Ако то није случај, нпр. $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}(B) = B_1 \neq B$, нека је q медијатриса BB_1. Уочимо да је $AB \cong AB_1$ па и $A \in q$. Зато $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{I} : A, B \mapsto A, B$.

Ако $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \circ I(C) = C$ онда $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \circ I$ има три неколинеарне тачке фиксне па је $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{I} = \mathcal{E}$, а затим је и $\mathcal{I} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q$.

Ако је $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}(C) = C_1 \neq C$, нека је r медијатриса CC_1. Из $AC \cong AC_1$ следи да $A \in r$ и слично $B \in r$. Зато $\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \circ I : A, B, C \mapsto A, B, C$, па је $\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{I} = \mathcal{E}$, те је $\mathcal{I} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_r$. □

Теорема (15.13)

(Теорема Хјелмслева) Нека су a и b две компланарне праве. Ако $a \cap b = \{O\}$ тада постоје тачно две праве s_1 и s_2 т.д. $\mathcal{S}_{s_i}(a) = b$ и при том $s_1 \perp s_2$, $O \in s_1, s_2$. Ако су a и b дисјунктне, онада постоји јединствена права s т.д. $\mathcal{S}_s(a) = b$. **БД**