15. Управност правих и равни

Дефиниција

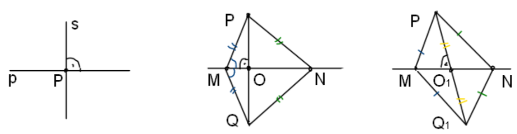
Ако праве p и q садрже краке правог угла онда су оне **управне**, **нормалне** или **ортогоналне** и пишемо $p \perp q$.
Ако је E подножје управне из темена A троугла ABC на правој BC, дуж AE је **висина** тог троугла.

Теорема (12.1)

Ако тачка P и права p припадају равни π, тада у π постоји јединствена права n која саджи P и ортогонална је на p.

Доказ. Ако $P \in p$ комплементне полуправе праве p са теменом P одређују два опружена угла. Нека је s бисектриса једног од њих. Тада је права n, $P \in n$ ортогонална на p акко садржи s, па постоји јединствена таква права n.

Нека $P \notin p$. Нека су $M, N \in p$ произвољне и Q т.д. $P, Q \div p$ и $(M, N, P) \cong (M, N, Q)$.



Због $P, Q \div p$, права p сече дуж PQ у тачки O. Тачка O је различита од бар једне од тачака M и N, нпр. $O \neq M$. Прво, $\triangle PMN \cong \triangle QMN$ (ССС), па је и $\angle PMN \cong \angle QMN$. Зато је и $\angle PMO \cong \angle QMO$ (парови $\angle PMN$, $\angle PMO$ и $\angle QMN$, $\angle QMO$ се истовремено поклапају или су напоредни.)
Даље је $\triangle PMO \cong \triangle QMO$ (СУС), па је и $\angle POM \cong \angle QOM$. При том су у питању напоредни углови, па су и прави. Зато је $PQ \perp p$.

Јединственост: Нека је $n_1 \perp p$, $P \in n_1$. Нека $n_1 \cap p = \{O_1\}$, и нека је Q_1 т.д. $\mathcal{B}(P, O_1, Q_1)$ и $PO_1 \cong O_1Q_1$. Ако је $M \neq O_1$ важи $\triangle PO_1M \cong \triangle Q_1O_1M$ (СУС), па је и $PM \cong Q_1M$. Ако је $M = O_1$ онда тривијално важи $PM \cong Q_1M$. Слично $PN \cong Q_1N$.

Дакле $(P, N, M) \cong (Q_1, N, M)$, па и $(Q, N, M) \cong (Q_1, N, M)$. При том, Q и Q_1 су тачке исте полуравни са рубом NM па је $Q = Q_1$ и $n = n_1$. □

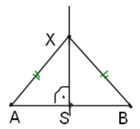
Дефиниција

Нека је AB дуж равни π. Права равни π која садржи средиште дужи AB и управна је на AB је **медијатриса** те дужи.

Теорема

Нека је AB дуж равни π. Тачка $X \in \pi$ припада медијатриси дужи AB акко је $XA \cong XB$.

Доказ. Нека су S и s средиште и медијатриса AB. За тачку $X = S \in AB$ тврђење важи, па нека је $X \notin AB$.



Важи и $AS \cong BS$ и $XS \cong XS$. Тада је $X \in s \Leftrightarrow \angle XSA \cong \angle XSB \Leftrightarrow \triangle XSA \cong \triangle XSB \Leftrightarrow XA \cong XB$. □

Дефиниција

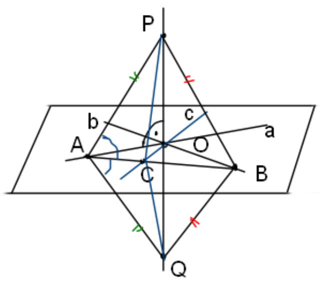
Права p и раван π су **управне**, **нормалне** или **ортогоналне** $(p \perp \pi)$, ако се секу у некој тачки O и ако је p ортогонална на свакој правој равни π која садржи O.

Примедба *Специјално, тада можемо рећи и да је p ортогонална на све праве равни π, чак и на оне са којима је мимоилазна.*

Теорема (12.4)

Ако је права p управна на две праве a и b равни π $(a \cap b = \{O\})$, онда је $p \perp \pi$.

Доказ. Треба показати да је $p \perp c$, за произвољну праву $c \subset \pi$ $O \in c$.



Нека је $P \in p$, $P \neq O$ и $Q \in p$ т.д. је O средиште PQ. Права c припада пару унакрсних углова одређених са a и b. Нека су $A \in a$ и $B \in b$ тачке крака једног од тих углова. Тада c сече дуж AB у тачки C.

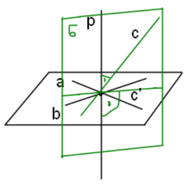
Прво, $\triangle POA \cong \triangle QOA$ (СУС). Зато је $PA \cong QA$. Слично је и $PB \cong QB$. Затим је $\triangle PAB \cong \triangle QAB$ по ССС, а из тога следи $\angle PAC \cong \angle QAC$. Сада је и $\triangle PAC \cong \triangle QAC$ по СУС, па је даље и $PC \cong QC$.

Сада следи да је $\triangle POC \cong \triangle QOC$ по ССС. Зато је и $\angle POC \cong \angle QOC$, а при том су у питању напоредни углови, па су зато и прави, тј. $PQ \perp c$. □

Теорема (12.5)

Све праве које садрже тачку $P \in p$ и ортогоналне су на p припадају једној равни која је такође ортогонална на p.

Доказ. Нека су a, b т.д. $P \in a, b$, $a, b \perp p$. Нека је π раван која садржи a и b.



Тада је $\pi \perp p$, односно све праве равни π које садрже P су нормалне на p. Претпоставимо да постоји права $c \perp p$ која не припада π. Како се p и c секу, постоји раван σ која их садржи. Важи $P \in \sigma \cap \pi$, па је $\sigma \cap \pi = c'$, $P \in c'$.

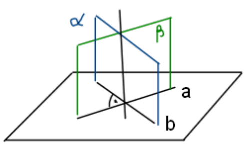
Тада су p, c, c' праве исте равни σ и при том $P \in c, c'$ и $c, c' \perp p$ па је $c = c'$. $\lightning$ □

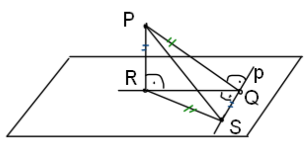
Теорема (12.6)

Постоји јединствена права која садржи дату тачку P и нормална је на раван π.

Доказ. Егзистенција: Нека $P \in \pi$. Нека су $a, b \subset \pi$, $a \cap b = \{P\}$ и $a \perp b$. Нека је α т.д. $P \in \alpha$, $\alpha \perp a$ и слично $P \in \beta$, $\beta \perp b$. Равни α и β се секу по правој p која садржи P.

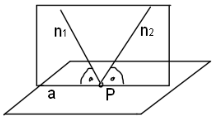
С обзиром да садржи P и припада α следи $p \perp a$. Слично, $p \perp b$. Из $p \perp a, b$ следи $p \perp \pi$.

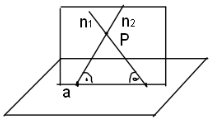




Нека, сада $P \notin \pi$. Нека је $p \subset \pi$ произвољна и Q подножје нормале из P на p. Нека је $q \subset \pi$, $Q \in q$, $q \perp p$. Нека је R подножје нормале из P на q. Покажимо да је $PR \perp \pi$.
Ако је $R = Q$ онда је PR ортогонална на p и q па је и $PR \perp \pi$.
Нека је $P \neq R$. $PR \perp q$, па треба показати да је PR нормална на бар још једну праву равни π кроз R. Нека је $S \in p$, т.д. $SQ \cong PR$. Тада је $\triangle PRQ \cong \triangle SQR$ по СУС. Зато је и $PQ \cong SR$. Сада је $\triangle PRS \cong \triangle SQP$ (ССС). Зато је $\angle PRS \cong \angle SQP$, те је прав, односно $PR \perp RS$. Дакле, $PR \perp q, RS \Rightarrow PR \perp \pi$.

Јединственост: Претпоставимо да постоје $P \in n_1, n_2$, $n_1, n_2 \perp \pi$, $n_1 \neq n_2$. Тада постоји раван σ, т.д. $n_1, n_2 \subset \sigma$. Нека је $\sigma \cap \pi = a$. Права a садржи продоре n_1 и n_2 кроз π. Дакле, n_1, n_2 су праве кроз P обе ортогоналне на a. ↯ □

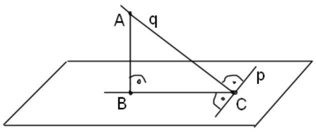




Теорема (12.7)

Постоји јединствена раван која садржи дату тачку и ортогонална је на дату праву. **БД**

Теорема (12.8)

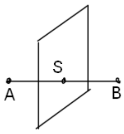


(Теорема о три нормале) Нека права q сече раван π у тачки C, нека је $p \subset \pi$, $C \in p$ и нека је B подножје управне из $A \in q$ на π, $B \neq C$. Тада је $q \perp p$ акко је $BC \perp p$. **БД**

Теорема (12.9)

Две праве управне на равни π су компланарне. **БД**

Дефиниција



Раван која садржи средиште дужи AB и ортогонална је на AB је **медијална раван** дужи AB.

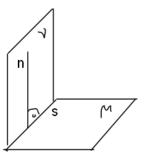
Теорема (12.10)

Тачка X припада медијалној равни дужи AB акко је $XA \cong XB$. **БД**

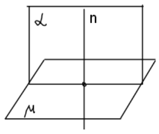
Дефиниција

Диедар је **прав** ако је подударан свом напоредном диедру. Равни α и β које садрже пљосни правог диедра су **управне**, **нормалне** или **ортогоналне** (пишемо $\alpha \perp \beta$).

Теорема (14.1)



Нека је $\nu \perp \mu$ и $\nu \cap \mu = s$. Нека је $n \subset \nu$, $n \perp s$. Тада је и $n \perp \mu$. **БД**

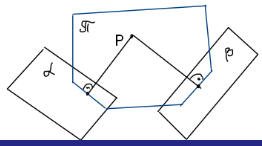


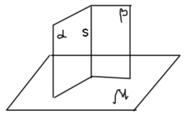
Теорема (14.2)

Нека је $n \perp \mu$ и $n \subset \alpha$. Тада је $\alpha \perp \mu$. **БД**

Теорема (14.3)

За сваку тачку простора P и равни α и β постоји раван π, т.д. $P \in \pi$, $\pi \perp \alpha, \beta$. **БД**





Теорема (14.5)

Нека је $\alpha, \beta \perp \mu$ и $\alpha \cap \beta = s$. Тада је $s \perp \mu$. **БД**