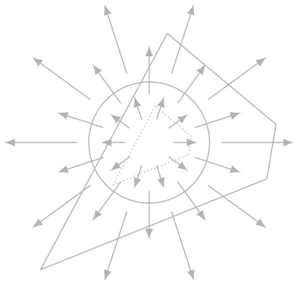
УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Група класа симплектичких пресликавања и егзотични симплектоморфизми

- мастер рад -

Студент: Душан Дробњак
Ментор: др Игор Уљаревић



Београд, септембар 2020.

Садржај

Предговор

Године 1956. Џон Милнор је пронашао неочекиван пример глатке многострукости која је хомеоморфна сфери S^7, али не поседује стандардну глатку структуру. То је отворило многа питања о тзв. егзотичним структурама, тј. онима које нису изоморфне стандардној. За $n > 4$, група различитих глатких структура на сфери S^n (са операцијом повезане суме) је у вези са групом компактно садржаних дифеоморфизама до на глатку изотопију (та група се назива група класа пресликавања) еуклидских простора $\mathbb{R}^{n+1}$. Сваки такав дифеоморфизам који није у класи пресликавања id назива се егзотичним. Природно питање које се даље намеће је шта се дешава у симплектичкој категорији.

Познато је да је група компактно садржаних симплектичких дифеоморфизама до на симплектичку изотопију (та група се зове и група класа симплектичких пресликавања) од $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{\text{st}})$ тривијална за $n \in \{1, 2\}$. Већ за $n = 2$ ова чињеница захтева тежак доказ који је дао Громов у свом чувеном раду из 1985. године. За $n > 2$ тај проблем остаје отворен. Недавни резултати су дали допринос делимичном одговарању на питање о нетривијалности групе класа симплектичких пресликавања у случају неких специјалних класа симплектичких многострукости.

Рад је подељен на три поглавља. Прво поглавље тиче се категорије глатких многострукости и глатких егзотичних структура у њој. Описани су појмови егзотичних дифеоморфизама и егзотичних глатких сфера (са посебним акцентом на Милноров доказ о постојању егзотичних 7-сфера), као и њихова међусобна веза. Друго поглавље тиче се уводних појмова симплектичке и контактне геометрије, као и описа главног појма ово рада – егзотичних симплектоморфизма, уз њихову паралелу са егзотичним дифеоморфизмима. Треће поглавље се бави Деновим увртањима, која су чести кандидати за егзотичне симплектоморфизме на одређеним симплектичким многострукостима.

Желео бих да се захвалим свом ментору, др Игору Уљаревићу, на предложеној теми за рад, саветима и одговорима на сва моја питања. Захваљујем се и осталим члановима комисије за одбрану рада, проф. др Јелени Катић и проф. др Дарку Милинковићу, на корисним сугестијама у току израде рада и након читања текста.

Такође, захваљујем се Ани Жегарац на подршци у раду и бројним корисним дискусијама, као и на помоћи око цртања слика у Inkscape-у. Захвалност дугујем и Марку Кузмановићу за помоћ у раду у програму Wolfram Mathematica.

1 Егзотичне структуре у глаткој категорији

1.1 Глатка Поенкареова хипотеза

Једно занимљиво питање које се може поставити је:

Да ли је свака многострукост која је хомотопна сфери S^n
уједно и изоморфна сфери S^n (у некој изабраној категорији)?

Категорије многострукости на које се овде мисли су тополошке (Top), део по део линеарне (PL) или глатке (Diff). Ово питање је формулисано у виду тврђења које је познато као *уопштена Поенкареова хипотеза*, а његова прецизна формулација је следећа.

Тврђење 1.1. Ако је M затворена Cat n-многострукост за коју важи $M \simeq S^n$, онда је $M \cong S^n$ (у Cat).

Овде је са Cat означена категорија многострукости, тј. конкретно $\mathrm{Cat} \in \{\mathrm{Top}, \mathrm{PL}, \mathrm{Diff}\}$. За многострукости у категорији Top подразумевамо да су Хаусдорфови простори са пребројивом базом топологије, који локално изгледају као еуклидски простор фиксиране (коначне) димензије. У категорији Diff мислимо на глатке многострукости, односно на тополошке многострукости са атласом чије су функције прелаKска глатке. У целом раду ће се под појмом глатко мислити на класу C^∞, осим ако се другачије не назначи. Многострукости у категорији PL су тополошке многострукости са атласом чије су функције прелаKска део по део линеарне. Изоморфизам у Top је хомеоморфизам, у Diff је то дифеоморфизам, док се за PL дефинише аналогно (захтевајући да је пресликавање бијективно тако да су оно само и његов инверз део по део линеарна пресликавања, гледајући их на картама) и назива PL хомеоморфизам.

Главно питање је у којим димензијама важи ово тврђење за сваку од три категорије. За случајеве $n \in \{1, 2\}$ се зна да тврђење важи у свакој од три категорије, што је позната чињеница која следи из теореме о класификацији многострукости у овим димензијама. У категорији PL је Смејл 1962. године доказао [35] да је хипотеза тачна за $n \geqslant 5$. У димензији $n = 4$ су хипотезе у категоријама PL и Diff еквивалентне и још увек није познато да ли важе. Што се димензије $n = 3$ тиче, дуго се знало да је проблем еквивалентан у све три категорије. Тек почетком овог века Перелман је у три рада [29, 30, 31] дао потврдан одговор на питање хипотезе у овом случају. У категорији Top познато је да она важи за све $n \in \mathbb{N}$ – хипотезу је за случајеве $n \geqslant 5$ доказао Њуман 1966. године [26], док је случај $n = 4$ Фридман [11] доказао 1982. године и за то је добио Филдсову медаљу 1986. године.

Глатка Поенкареова хипотеза (верзија Тврђења 1.1 у Diff категорији) се показала тежом од друге две. Наиме, тек за понеку димензију се зна да је ова хипотеза тачна (на пример, $n \in \{1, 2, 3, 5, 6, 12, 61\}$). Међутим, у многим димензијама се зна да хипотеза није тачна. Први познати контрапример је за $n = 7$ из 1956. године, који је Милнор конструисао у свом раду [23]. Он је нашао пример тополошке сфере S^7 као S^3 раслојење над S^4, која нема стандардну глатку структуру и тиме није дифеоморфна стандардној сфери S^7.

Из приложеног закључујемо да постоје тополошке сфере које су међусобно хомеоморфне, али нису међусобно дифеоморфне. Глатка структура стандардне сфере S^n је позната и стога су нам занимљиве оне сфере које јој нису дифеоморфне. Њих издвајамо следећом дефиницијом.

Дефиниција 1.2. Глатку многострукост која је хомеоморфна сфери S^n зовемо *глатка сфера.* Глатка сфера S^n која није дифеоморфна стандардној глаткој сфери S^n назива се *егзотична сфера.*

1.2 Егзотични дифеоморфизми

Нека је M глатка многострукост. Са $\mathrm{Diff}(M)$ ћемо означити скуп свих дифеоморфизама од M, односно сва бијективна пресликавања из M у M таква да су она сама и њихови инверзи глатка пресликавања. Најбитније од њих, идентичко пресликавање, означаваћемо са $\mathrm{id} : M \to M$. Такође, у случају да је M оријентабилна, са $\mathrm{Diff}^+(M)$ означавамо оне дифеоморфизме из $\mathrm{Diff}(M)$ који чувају (неку изабрану) оријентацију. Под носачем дифеоморфизма φ мислимо на скуп

$$\mathrm{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in M \mid \varphi(x) \neq x\}}.$$

Дефиниција 1.3. За глатку многострукост M дефинишемо скуп

$$\mathrm{Diff_c}(M) = \{\varphi \in \mathrm{Diff}(M) \mid \text{скуп } \mathrm{supp}(\varphi) \text{ је компактан у } \mathrm{int}(M)\}$$

и зовемо га скуп дифеоморфизама од M са компактним носачем. Под унутрашњошћу се овде подразумева скуп $\mathrm{int}(M) = M \setminus \partial M$.

Напомена. Ако је многострукост M затворена, онда су групе $\mathrm{Diff_c}(M)$ и $\mathrm{Diff}(M)$ идентичне. У случају да M има границу, онда дифеоморфизам из $\mathrm{Diff_c}(M)$ мора бити једнак id у некој околини границе.

Напомена. У случају да је M оријентабилна, у дефиницији $\mathrm{Diff_c}(M)$ ћемо гледати само оне дифеоморфизме из $\mathrm{Diff}(M)$ који чувају оријентацију и одговарајућу групу ћемо означавати са $\mathrm{Diff}^+(M)$. У општем случају, било да се говори о оријентабилној или неоријентабилној многострукости M, задржаћемо се на ознаци $\mathrm{Diff_c}(M)$ да не бисмо оптерећивали нотацију.

Дефиниција 1.4. Нека је M глатка многострукост и $f, g \in \mathrm{Diff_c}(M)$. За f и g кажемо да су глатко изотопни (кроз компактно садржане дифеоморфизме) ако постоји глатко пресликавање $F : M \times [0,1] \to M$ такво да је:

(*i*) $F(x,0) = f(x)$ и $F(x,1) = g(x)$, за свако $x \in M$.

(*ii*) $f_t = F(\cdot, t) \in \mathrm{Diff_c}(M)$, за свако $t \in [0,1]$.

Често ћемо писати $f \overset{\mathrm{diff}}{\sim} g$.

Релација глатке изотопности је релација еквиваленције. Њене класе су компоненте повезаности групе $\mathrm{Diff_c}(M)$. Наиме, пут у $\mathrm{Diff_c}(M)$ између f и g је управо $t \mapsto f_t$ из дефиниције глатке изотопије. Ако означимо са

$$\mathrm{Diff_c^0}(M) = \{\varphi \in \mathrm{Diff_c}(M) \mid \varphi \overset{\mathrm{diff}}{\sim} \mathrm{id}\}$$

скуп оних дифеоморфизама који су повезани са id, можемо писати

$$\pi_0 \mathrm{Diff}_{\mathrm{c}}(M) = \mathrm{Diff}_{\mathrm{c}}(M) \Big/ \mathrm{Diff}^0_{\mathrm{c}}(M) = \mathrm{Diff}_{\mathrm{c}}(M) \Big/ \overset{\mathrm{diff}}{\sim} .$$

Напомена. Група $\mathrm{Diff}_{\mathrm{c}}(M)$ је локално контрактибилна и свака непрекидна путања може се деформисати до глатке, чувајући крајње тачке фиксним (погледати увод у [32]). Тако да ако за неке дифеоморфизме φ_0 и φ_1 важи $[\varphi_0] = [\varphi_1]$ у $\pi_0 \mathrm{Diff}_{\mathrm{c}}(M)$, онда је то еквивалентно са чињеницом да су они глатко изотопни.

Важи да је $\mathrm{Diff}^0_{\mathrm{c}}(M)$ нормална подгрупа у $\mathrm{Diff}_{\mathrm{c}}(M)$, а то нам омогућава да на $\pi_0 \mathrm{Diff}_{\mathrm{c}}(M)$ наметнемо структуру групе. Њу добијамо као наслеђену од $\mathrm{Diff}_{\mathrm{c}}(M)$ количником.

Дефиниција 1.5. Групу $\pi_0 \mathrm{Diff}_{\mathrm{c}}(M)$ називамо *група класа пресликавања*[1] глатке многострукости M.

Напомена. Термин *група класа пресликавања* се некад у литератури односи на хомеоморфизме, а не дифеоморфизме. Међутим, овде радимо са глатким многострукостима, па је изабрано да се тако назове одговарајућа група изведена од групе дифеоморфизама. У наставку нас чека и аналогна дефиниција за симплектичке многострукости и њихове симетрије (Дефиниција 2.21). Наравно, могуће је дефинисати све ове појмове и у општијој ситуацији са групом Aut свих аутоморфизама (у одређеној категорији), али је овде изабран приступ са појединачним дефинисањем за категорију глатких и категорију симплектичких многострукости, јер су оне релевантне за овај рад.

Посебну пажњу ћемо посветити оним дифеоморфизмима који нису изотопни пресликавању id.

Дефиниција 1.6. Дифеоморфизам φ глатке многострукости M за који важи $\varphi \in \mathrm{Diff}_{\mathrm{c}}(M) \setminus \mathrm{Diff}^0_{\mathrm{c}}(M)$ зовемо *егзотични дифеоморфизам.* Другим речима, егзотични дифеоморфизми су они који нису изотопни id.

Питање егзистенције егзотичног дифеоморфизма је заправо питање о нетривијалности групе $\pi_0 \mathrm{Diff}_{\mathrm{c}}(M)$.

1.3 Милнорове сфере

У овом делу ћемо описати све могуће тоталне просторе раслојења над S^4 са фибром S^3 и структурном групом $SO(4)$. Неки од тих тоталних простора биће хомеоморфни тополошкој сфери S^7, а неки мањи подскуп њих неће бити дифеоморфни стандардној глаткој сфери S^7. Џон Милнор је ово оригинално описао у свом раду [23]. У доказима се користио методама алгебарске и диференцијалне топологије, попут карактеристичних класа и Рибове теореме о сфери.

Осим поменутог главног рада, овај одељак се ослања на [22] и предавање које је Милнор одржао поводом доделе Абелове награде 2011. године [24].

---

[1] На енглеском: mapping class group

1.3.1 Сферна раслојења

Дефиниција 1.7. *Раслојење* је уређена четворка (F, E, B, p), где су F, E, B тополошки простори, а пресликавање $p : E \to B$ такво да важи

(*i*) За сваку тачку $b \in B$ постоји околина $U \subset B$ од b и хомеоморфизам $h : U \times F \xrightarrow{\approx} p^{-1}(U)$, који се назива локалном тривијализацијом.

(*ii*) Хомеоморфизам h се слаже са p и пројекцијом на прву координату π_1 као $p \circ h = \pi_1$. Другим речима, наредни дијаграм комутира.

$$\begin{tikzcd}
U \times F \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\pi_1"] & p^{-1}(U) \arrow[dl, "p"] \\
U &
\end{tikzcd}$$

Простор B се назива базни простор, E тотални простор, F фибра (влакно) и p пројекција овог раслојења. Раслојење се често обележава са

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r] & E \arrow[d, "p"] \\
 & B\,.
\end{tikzcd}$$

Важи да је фибра F хомеоморфна скупу $p^{-1}(\{b\})$, за свако $b \in B$. У случају да је тополошки простор F дискретан, раслојење се назива наткривање. Скуп $\{(U_i, h_i)\}_{i \in I}$ локалних тривијализација са локалним скуповима из претходне дефиниције назива се *атлас раслојења*, а његови елементи *карте раслојења*.

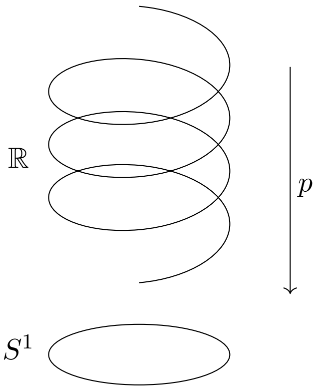
У случају да су F и B глатке многострукости и пресликавање p сурјективно, онда је и E глатка многострукост чија је димензија збир димензија F и B. Глатку структуру на E чине пресликавања облика $(\sigma \circ p, \tau \circ \pi_2 \circ h^{-1})$ дефинисана на неком отвореном подскупу од $p^{-1}(U_i)$, где је σ нека карта од B дефинисана на отвореном подскупу од U_i и τ нека карта на F дефинисана на отвореном подскупу од $\pi_2 \circ h^{-1}(p^{-1}(U_i)) \subset F$ (са π_2 је означена пројекција на другу координату).

Претпоставимо да смо у глатком окружењу и да имамо још и Лијеву групу G која дејствује на фибри F. Нека је то дејство ефективно (то значи да ако важи $g \cdot f = f$, за све $f \in F$ и неко $g \in G$, онда важи да је g јединични елемент). У том случају важи да је група дифеоморфизама простора F изоморфна са G. Узмимо две карте, (U_k, h_k) и (U_l, h_l), и дефинишимо пресликавање $h_{i,x} = h_i(x, \cdot)$, за $i \in I$, такво да се за свако $x \in U_k \cap U_l$ хомеоморфизам $h_{l,x}^{-1} \circ h_{k,x} : F \to F$ слаже са дејством елемента из G (овакав елемент је јединствен, јер је дејство ефективно). Такође, захтевамо и да је пресликавање h_{lk}, које је дефинисано са $h_{lk}(x) = h_{l,x}^{-1} \circ h_{k,x}$, непрекидно.

Ако су сви ови услови испуњени, групу G зовемо *структурном групом* раслојења.

Пример 1.8. Први пример раслојења је тривијално раслојење, које добијамо када је $E = B \times F$. Пресликавање $p : B \times F \to B$ је прва пројекција $p = \pi_1$.

Пример 1.9. Један илустративан пример нетривијалног раслојења може бити *увијена* права у завојницу изнад круга S^1 (Слика 1). Тотални простор је $E = \mathbb{R}$, а база је круг $B = S^1$. Пројекција $p : \mathbb{R} \to S^1$ је дата са $p(t) = (\cos t, \sin t) \in S^1 \subset \mathbb{R}^2$. Фибра је бесконачна дискретна група $F = \mathbb{Z}$.



Слика 1: Пример наткривања $\mathbb{R} \to S^1$.

Пример 1.10. (**Сферна раслојења**) Овде ћемо сферна раслојења дефинисати као она раслојења код којих су сва три простора (F, E, B) неке сфере S^n, за $n \in \mathbb{N}_0$, уз напомену да се терминологија може разликовати у зависности од литературе. Показује се да су ова раслојења у бијективној кореспонденцији са коначнодимензионим алтернирајућим нормираним алгебрама са дељењем над $\mathbb{R}$ [27]. Оваквих алгебри има четири и помоћу њих се дефинишу четири сферна раслојења. Ако је A једна таква алгебра, сферу $\{x \in A \mid \|x\| = 1\}$ можемо опремити структуром групе и та сфера ће представљати фибру раслојења. Поменуте четири алгебре су:

- Реални бројеви $\mathbb{R}$.

  Сфера у $\mathbb{R}$ је скуп $S^0 = \{-1, +1\}$ и он представља групу у односу на множење реалних бројева. Раслојење је

  $$\begin{tikzcd} S^0 \arrow[r] & S^1 \arrow[d, "p"] \\ & S^1, \end{tikzcd}$$

  где је пресликавање p дато са $p(z) = z^2$. Њега можемо визуализовати као да се тотални простор S^1 двослојно увија изнад базе S^1. Фибра је зато двоелементни скуп који одговара групи S^0.

- Комплексни бројеви $\mathbb{C}$.

  Сфера у $\mathbb{C}$ је скуп $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ и он представља групу у односу на множење комплексних бројева. Раслојење је

  $$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r] & S^3 \arrow[d, "h"] \\ & S^2 \end{tikzcd}$$

и често се назива *Хопфово раслојење.* Сферу S^3 за тренутак посматрајмо као подскуп $\mathbb{C}^2$ са координатама (z_1, z_2) за које је $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$, а сферу S^2 као комплексни пројективни простор $\mathbb{C}P^1$ са хомогеним координатама $[z_1 : z_2]$. Пресликавање $h : S^3 \to \mathbb{C}P^1$ дато са $h(z_1, z_2) = [z_1 : z_2]$ задаје ово раслојење. Инверзна слика тачке $[u : v] \in \mathbb{C}P^1$ при пресликавању h је

$$\begin{aligned} h^{-1}([u:v]) &= \{(\lambda u, \lambda v) \in \mathbb{C}^2 \mid |\lambda u|^2 + |\lambda v|^2 = 1\} \\ &= \{(\lambda u, \lambda v) \in \mathbb{C}^2 \mid |\lambda|^2 = 1\} \\ &\approx \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda|^2 = 1\} = S^1. \end{aligned} \tag{1}$$

- Кватерниони $\mathbb{H}$.

Алгебра кватерниона се дефинише као скуп елемената облика

$$u = a + bi + cj + dk, \text{ за } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Сабирање се врши по компонентама, а множење уз правила $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ и није комутативно. Операција конјуговања је дата са $\overline{u} = a - bi - cj - dk$, а реални део кватерниона дефинишемо као $\mathrm{Re}\,(u) = \frac{1}{2}\,(u + \overline{u}) = a$. Норму изводимо из конјуговања као $\|u\| = \sqrt{u\overline{u}}$. Кватернионску пројективну праву дефинишемо као

$$\mathbb{H}P^1 = \mathbb{H}^2 \Big/ \rho,$$

где је релација ρ задата са

$$x\,\rho\,y \Leftrightarrow \text{постоји } c \in \mathbb{H} \setminus \{0\} \text{ тако да важи } x = cy. \tag{2}$$

Простор $\mathbb{H}P^1$ опремимо хомогеним координатама $[u_1 : u_2]$ на стандардан начин.

Лема 1.11. Кватернионска пројективна права $\mathbb{H}P^1$ је хомеоморфна сфери S^4.

Доказ. Простор $\mathbb{H}P^1$ се може добити и као количник сфере S^7 у простору $\mathbb{H}^2 \approx \mathbb{R}^8$ по релацији изведеној из ρ – два елемента су у релацији, ако постоји наведено $c \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ у (2) које је јединичне норме. Будући да је сфера S^7 компактна, следи да је простор $\mathbb{H}P^1$ компактан. Скуп $\mathbb{H}P^1 \setminus \{[1:0]\}$ је једнак скупу $\{[xy^{-1} : 1] \mid x \in \mathbb{H}, y \in \mathbb{H} \setminus \{0\}\}$. Пошто израз xy^{-1} пролази цело $\mathbb{H}$, онда се $\mathbb{H}P^1$ без једне тачке може идентификовати са $\mathbb{H} \approx \mathbb{R}^4$. Узимајући компактификације једном тачком ових простора, закључујемо да мора бити $\mathbb{H}P^1 \approx S^4$. □

Пресликавање $f : S^7 \to \mathbb{H}P^1$ дато са $f(u_1, u_2) = [u_1 : u_2]$ ће бити пројекција раслојења у овом случају. Скуп $f^{-1}([1:0])$ се слично као у (1) добије да је

$$f^{-1}([1:0]) \approx \{\lambda \in \mathbb{H} \mid \|\lambda\|^2 = 1\} = S^3.$$

Раслојење у овом случају је

$$\begin{tikzcd} S^3 \arrow[r] & S^7 \arrow[d, "f"] \\ & S^4 \end{tikzcd}$$

и оно ће бити кључно у наставку приче о Милноровој конструкцији егзотичних сфера S^7.

- Октаниони $\mathbb{O}$.

  Овде се нећемо задржавати, уз напомену да су све дефиниције налик на оне код кватерниона. Октанионска алгебра нема чак ни особину асоцијативности, тако да је мање интуитивна од претходних. Раслојење које овде добијамо је

$$\begin{tikzcd} S^7 \arrow[r] & S^{15} \arrow[d, "p"] \\ & S^8 . \end{tikzcd}$$

Детаљније о сферним раслојењима се може видети у [14, 36, 40].

Раслојења су специјалан случај фибрација. Код фибрација, фибра се од тачке до тачке може разликовати (није неопходно да ти простори буду хомеоморфни, већ само хомотопни). За нас један битан тип фибрација су Серове фибрације, које издвајамо следећом дефиницијом.

Дефиниција 1.12. *Серова фибрација* је непрекидно пресликавање $p : E \to B$ између тополошких простора E и B које има својство подизања хомотопије у односу на дискове D^n, за свако $n \in \mathbb{N}$.

У категорији $CW-$комплекса, што је најчешћи посматрани случај у пракси, Серова фибрација која је локално тривијална је раслојење. За фибру се може узети $F = p^{-1}(b)$, за неко $b \in B$ (подразумевамо путну повезаност простора B). Можда најбитније алгебарско својство Серове фибрације је њено смештање у дуги тачан низ хомотопских група.

Теорема 1.13. [14, Теорема 4.41] Нека је $p : E \to B$ Серова фибрација и $b_0 \in B$, $x_0 \in F = p^{-1}(b_0)$ истакнуте тачке. Онда је пресликавање

$$p_* : \pi_n(E, F, x_0) \to \pi_n(B, b_0)$$

изоморфизам за свако $n \in \mathbb{N}$. У случају да је простор B путно повезан, имамо дуги тачан низ хомотопских група

$$\ldots \to \pi_n(F, x_0) \to \pi_n(E, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \to \pi_{n-1}(F, x_0) \to \ldots \to \pi_0(E, x_0) \to 0.$$

Сва поменута сферна раслојења у Примеру 1.10 су и Серове фибрације.

1.3.2 Конструкција фамилије тополошких сфера S^7

Као кандидате за седмодимензионе егзотичне сфере ћемо посматрати тоталне просторе раслојења са базом S^4 и фибром S^3, који имају $SO(4)$ за структурну групу. Следећа теорема нам даје представу о свим таквим раслојењима.

Теорема 1.14. [36, Теорема 18.5] Нека је G повезана група. Постоји бијекција (до на изоморфизам) између свих раслојења над сфером S^n са структурном групом G и елемената групе $\pi_{n-1}(G)$.

Из теореме следи да су сва разматрана раслојења индексирана групом $\pi_3(SO(4)) \cong \mathbb{Z}^2$. У доказу ове теореме је дата експлицитна конструкција изоморфизма у општем случају. Изоморфизам који елементу из $\pi_3(SO(4))$ додељује раслојење се задаје на следећи начин. Нека је $f : \mathbb{Z}^2 \to \pi_3(SO(4))$ изоморфизам тако да је $f(k,l) = [f_{k,l}] \in \pi_3(SO(4))$ класа пресликавања

$$f_{k,l} : S^3 \to SO(4), \quad f_{k,l}(u)(v) = u^k v u^l.$$

Ово пресликавање треба схватити тако да елемент $f_{k,l}(u) \in SO(4)$ делује на вектор $v \in \mathbb{R}^4$ као одговарајућа ротација. На десној страни се подразумева множење кватерниона, са одговарајућим идентификацијама.

Нека су U_1 и U_2 две стандардне карте које покривају сферу S^4. Означимо са U_1 сферу S^4 без северног пола (који одговара тачки $[1:0]$), а са U_2 сферу S^4 без јужног пола (који одговара тачки $[0:1]$). Скупови U_1 и U_2 долазе са пресликавањима $\phi_1 : U_1 \to \mathbb{H}$ и $\phi_2 : U_2 \to \mathbb{H}$ датим са

$$\phi_1([x:1]) = x, \quad \phi_2([1:y]) = y.$$

Функција преласка на скупу $\mathbb{H}P^1 \setminus \{[1:0],[0:1]\}$ је задата као

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : z \mapsto [z:1] = \left[1 : \frac{1}{z}\right] \mapsto \frac{1}{z}.$$

Идеја је да тоталне просторе конструишемо као раслојење над S^4 са поменутим картама, али тако да у свакој фибри извршимо ротацију која одговара елементу структурне групе $SO(4)$. Множење кватернионима се може интерпретирати као ротација, тако да су они згодан алат у овом запису. Фамилију тоталних простора индексирану са $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$ дефинишемо на следећи начин. Нека је са

$$f_{k,l} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \times S^3 \to \phi_2(U_1 \cap U_2) \times S^3$$

означено пресликавање уз помоћ кога ћемо лепити наведене скупове. То пресликавање је дато са

$$f_{k,l}(z,u) = \left(\frac{1}{z}, \frac{z^k u z^l}{\|z\|^{k+l}}\right).$$

Део $\frac{1}{z}$ потиче од функције преласка у бази, док је пресликавање $u \mapsto \frac{z^k u z^l}{\|z\|^{k+l}}$ елемент структурне групе $SO(4)$. То следи из његове линеарности и чињенице да је

$$\|u\| = 1 \Rightarrow \left\| \frac{z^k u z^l}{\|z\|^{k+l}} \right\| = \frac{\|z\|^k \|u\| \|z\|^l}{\|z\|^{k+l}} = \frac{\|z\|^{k+l} \|u\|}{\|z\|^{k+l}} = 1.$$

Као последица Теореме 1.14 следи да су сва раслојења S^3 над S^4 са структурном групом $SO(4)$ задата фамилијом функција $f_{k,l}$. Тотални простор тог раслојења је

$$M_{k,l} = \left(\phi_1(U_1) \times S^3\right) \cup_{f_{k,l}} \left(\phi_2(U_2) \times S^3\right), \tag{3}$$

а цело раслојење означимо са $\xi_{k,l}$.

Сада ћемо доказати да је за $l = -k - 1$ тотални простор $M_{k,l} = M_{k,-k-1}$ хомеоморфан сфери S^7. Идеја је искористити Рибову теорему о сфери. Означимо надаље $M_k = M_{k,-k-1}$ и $\xi_k = \xi_{k,-k-1}$, подразумевајући да је $k \in \mathbb{Z}$.

Теорема 1.15. [3, Последица 3.22] Нека је M^n глатка компактна многострукост и $f : M \to \mathbb{R}$ глатка функција са тачно две критичне тачке, које су обе недегенерисане. Тада је многострукост M хомеоморфна сфери S^n.

Скица доказа. Многострукост M је компактна, па f има минимум и максимум, и они се достижу у критичним тачкама. Нека функција f у тачки p достиже минимум, $f(p) = m$, а у тачки q максимум, $f(q) = M$. Функција f је Морсова, па ћемо се користити познатим тврђењима везаним за ову класу функција. Критична тачка p је индекса n, па по Морсовој леми [3, Лема 3.11] постоји отворена околина U_p тачке p са координатама $(u_1, \ldots, u_n)$ тако да важи

$$f(x) = m + (u_1^2 + \ldots + u_n^2), \text{ за } x \in U_p.$$

То значи да је за неко $a > m$ (изабрано тако да $f^{-1}([m, a]) \subset U_p$) важи да је

$$\begin{aligned} f^{-1}([m,a]) &= \{(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n \mid m + (u_1^2 + \ldots + u_n^2) \leqslant a\} \\ &= \{(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n \mid u_1^2 + \ldots + u_n^2 \leqslant a - m\} \approx D^n. \end{aligned}$$

На аналоган начин можемо изабрати околину U_q тачке q и $b < M$ тако да важи

$$\begin{aligned} f^{-1}([b,M]) &= \{(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n \mid M - (u_1^2 + \ldots + u_n^2) \geqslant b\} \\ &= \{(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n \mid u_1^2 + \ldots + u_n^2 \leqslant M - b\} \approx D^n. \end{aligned}$$

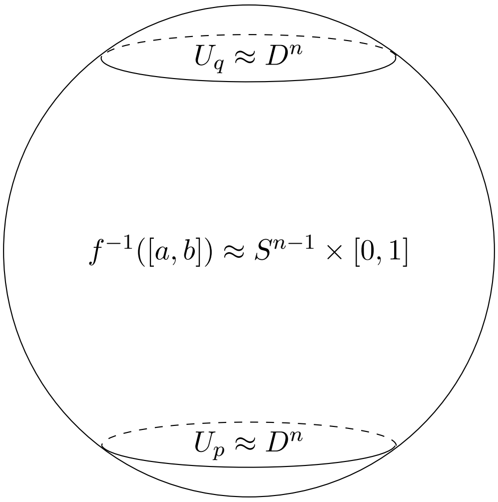
У интервалу $[a, b]$ нема критичних тачака, па важи $f^{-1}([a, b]) \approx S^{m-1} \times [0, 1]$ [3, Последица 3.21]. Још је потребно доказати да се одговарајућим лепљењем добија сфера S^n (Слика 2).

Границу ∂D^n диска $D^n \approx U_q$ који одговара критичној тачки q лепимо по компоненти границе цилиндра $f^{-1}(\{b\}) \approx S^{n-1} \times \{1\}$. Границу другог диска $D^n \approx U_p$ лепимо по другој компоменти границе цилиндра $f^{-1}(\{a\}) \approx S^{n-1} \times \{0\}$. Ово лепљење задаје хомоморфизам почетне многострукости M и сфере S^n. Он се може и експлицитно конструисати, а та конструкција и технички детаљи ће овде бити прескочени. □

Лема 1.16. Тотални простор M_k је хомеоморфан сфери S^7.

Доказ. Тотални простори M_k су глатке компактне многострукости и важи

$$\dim(M_k) = \dim(S^4) + \dim(S^3) = 7.$$



Слика 2: Приказ лепљења скупова D^n, $S^{n-1} \times [0,1]$ и D^n у сферу S^n.

Стога је довољно наћи функцију из услова Рибове теореме. Дефинишимо функцију g на свакој карти посебно. Нека је

$$g(z,u) = g_1(z,u) = \frac{\mathrm{Re}\,(u)}{\sqrt{1+\|z\|^2}},\ \text{за } (z,u) \in \phi_1(U_1) \times S^3 \text{ и}$$
$$g(z,u) = g_2(z,u) = \frac{\mathrm{Re}\left(zu^{-1}\right)}{\sqrt{1+\left\|zu^{-1}\right\|^2}},\ \text{за } (z,u) \in \phi_2(U_2) \times S^3.$$

За почетак би требало проверити да је функција g добро дефинисана, тј. да се вредности g_1 и g_2 поклапају на пресеку карти. Одговарајући скупови се лепе уз помоћ пресликавања $f_{k,-k-1}$ и потребно је проверити да је $g_2 \circ f_{k,-k-1} = g_1$. Рачунамо

$$\frac{1}{z}\cdot\left(\frac{z^k u z^{-k-1}}{\|z\|^{-1}}\right)^{-1} = \frac{1}{z}\cdot\overline{\left(\frac{z^k u z^{-k-1}}{\|z\|^{-1}}\right)} = \frac{1}{z\cdot\overline{z}}\cdot\frac{\overline{z}\cdot\overline{z}^k\,\overline{uz}^{-k-1}}{\|z\|^{-1}} = \frac{\overline{z}^{(k+1)}\,\overline{uz}^{-(k+1)}}{\|z\|},$$

а онда и

$$g_2\left(f_{k,-k-1}(z,u)\right) = g_2\left(\frac{1}{z}, \frac{z^k u z^{-k-1}}{\|z\|^{-1}}\right) = \frac{\mathrm{Re}\left(\frac{\overline{z}^{(k+1)}\,\overline{uz}^{-(k+1)}}{\|z\|}\right)}{\sqrt{1+\left\|\frac{\overline{z}^{(k+1)}\,\overline{uz}^{-(k+1)}}{\|z\|}\right\|^2}}$$
$$= \frac{\frac{1}{\|z\|}\mathrm{Re}\,(\overline{u})}{\sqrt{1+\left\|\frac{\overline{u}}{z}\right\|^2}} = \frac{\mathrm{Re}\,(u)}{\sqrt{1+\|z\|^2}} = g_1(z,u).$$

Коришћена је особина кватерниона $\mathrm{Re}\,(y) = \mathrm{Re}\left(xyx^{-1}\right)$.

Функције g_1 и g_2 имају седмодимензиону многострукост као домен и могу се локално изразити помоћу седам променљивих. На пример, на скупу

$$\mathbb{R}^4 \times \{(a,b,c,d) \in S^3 \mid a > 0\},$$

са координатама таквим да је $a = \sqrt{1 - b^2 - c^2 - d^2}$ се изражава

$$g_1(z, u) = g_1(\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k, a + bi + cj + dk) = \frac{\sqrt{1 - b^2 - c^2 - d^2}}{\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2}},$$

$$g_2(z, u) = g_2(\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k, a + bi + cj + dk) = \frac{\alpha\sqrt{1 - b^2 - c^2 - d^2} + b\beta + c\gamma + d\delta}{\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2}}.$$

Градијенти функција g_1 и g_2 у овој карти су

$$\begin{aligned}\nabla g_1(z, u) &= -\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\alpha K}{\sigma^2}, \frac{\beta K}{\sigma^2}, \frac{\gamma K}{\sigma^2}, \frac{\delta K}{\sigma^2}, \frac{b}{K}, \frac{c}{K}, \frac{d}{K}\right)\\ \nabla g_2(z, u) &= \frac{1}{\sigma}\Bigg(\frac{K\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta}{\sigma^2}(-\alpha, -\beta, -\gamma, -\delta) + (K, b, c, d),\\ &\qquad \frac{-b\alpha}{K} + \beta, \frac{-c\alpha}{K} + \gamma, \frac{-d\alpha}{K} + \delta\Bigg).\end{aligned}$$

где је $\sigma = \sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2}$ и $K = \sqrt{1 - b^2 - c^2 - d^2}$.

Решавајући појединачне једначине $\nabla g_1(z, u) = 0$ и $\nabla g_2(z, u) = 0$ долазимо до закључка да функција g_1 има критичну тачку $(z, u) = (0, 1)$, а да функција g_2 нема критичних тачака у овој карти. Посматрајући карту

$$\mathbb{R}^4 \times \{(a, b, c, d) \in S^3 \mid a < 0\},$$

и на исти начин рачунајући, добијамо критичну тачку $(z, u) = (0, -1)$. Може се проверити да на картама $\mathbb{R}^4 \times T$, где је T неки од преосталих шест скупова који у унији са претходна два наведена покривају сферу S^3 (у питању су скупови $\{b > 0\}$, $\{b < 0\}$, $\{c > 0\}$, $\{c < 0\}$, $\{d > 0\}$, $\{d < 0\}$), неће бити нових критичних тачака. Недегенерисаност критичне тачке по дефиницији значи да је Хесијан у тој тачки недегенерисана матрица. То је тачно за обе критичне тачке, а рачун ће овде бити изостављен. За сав рачун који није експлицитно наведен коришћен је софтвер Wolfram Mathematica.

Сада доказ леме следи из примене Рибове теореме на функцију g.

$\square$

1.3.3 Егзотичне сфере

За произвољну многострукост M^n са $p_k \in H^{4k}(M)$ означаваћемо $k-$ту Понтрјагинову класу тангентног раслојења многострукости M и са $[M] \in H_n(M)$ фундаменталну класу од M. Понтрјагинове класе се могу добити из Чернових – важи да је $p_k = (-1)^k c_{2k}$, где је $c_{2k} \in H^{4k}(M)$ одговарајућа Чернова класа (за детаље погледати [25, Одељак 15]). Пошто се овде бавимо само осмодимензионим многострукостима, једине њихове (можда) ненула Понтрјагинове класе су $p_1 \in H^4(M)$ и $p_2 \in H^8(M)$. За даље разматрање потребна нам је дефиниција индекса многострукости.

Дефиниција 1.17. Нека је M^{4k} затворена оријентисана глатка многострукост. Означимо са

$$H^{2k}_{\text{tor}}(M) = H^{2k}(M) \Big/ (\text{торзија}) \cong \mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}.$$

Посматрајмо симетричну билинеарну форму која је дата кап производом

$$q : H^{2k}_{\mathrm{tor}}(M) \times H^{2k}_{\mathrm{tor}}(M) \to \mathbb{Z}$$
$$(x, y) \mapsto (x \smile y)\big([M]\big) .$$

Дијагонализујмо матрицу квадратне форме q над реалним бројевима и нека добијена матрица има p позитивних и n негативних сопствених вредности. *Индекс* многострукости M, у ознаци $\tau(M)$, дефинишемо као $\tau(M) = p - n$.

Кључан корак при тражењу Милнорових егзотичних сфера је Хирцебрухова теорема, која повезује индекс многострукости са Понтрјагиновим бројевима.

Теорема 1.18. [15, Теорема 8.2.2] Нека је M глатка оријентисана компактна многострукост димензије $4k$. Понтрјагинови бројеви су бројеви облика

$$p_{k_1} \smile p_{k_2} \smile \ldots \smile p_{k_m}\big([M]\big), \text{ за } k_1 + \ldots + k_m = k,$$

где су p_{k_j} Понтрјагинове класе. Индекс $\tau(M)$ је линеарна комбинација Понтрјагинових бројева. Специјално, за $k = 2$ важи

$$\tau(M) = \frac{7}{45} p_2\big([M]\big) - \frac{1}{45}\left(p_1 \smile p_1\right)\big([M]\big). \tag{4}$$

Сада ћемо формулисати теорему која карактерише егзотичне сфере S^7.

Теорема 1.19. Ако је простор M_k дифеоморфан стандардној сфери S^7, онда важи $(2k+1)^2 \equiv_7 1$.

Доказ. Уочимо диск раслојење које одговара сферном раслојењу ξ_k. Фибра тог раслојења је диск D^4, а тотални простор је многострукост димензије осам. Назовимо тај тотални простор B_k. Јасно је да важи $\partial B_k = M_k$. Многострукост M_k је оријентабилна и нека оријентацију задаје класа $\mu \in H_7(M_k)$. Оријентацију B_k задаје класа $\nu \in H_8(B_k, M_k)$ за коју важи $\partial\nu = \mu$.

Граница стандардног глатког диска D^8 је стандардна глатка сфера $S^7 \approx M_k$. Конструишимо многострукост $N_k = D^8 \cup_{M_k} B_k$ тако што многострукости B_k и D^8 залепимо по граници одговарајућим дифеоморфизмом. Резултујућа многострукост N_k је затворена и димензије 8. Њу можемо оријентисати тако да се оријентација слаже са оријентацијом B_k.

Многострукост B_k је хомотопски еквивалентна сфери S^4. Хомотопска еквиваленција је пројекција раслојења $p : B_k \to S^4$. Одатле следи да је

$$H^4(B_k) \cong H^4(S^4) \cong \mathbb{Z}.$$

Нека је $\iota \in H^4(B_k)$ неки генератор ове групе. Важи да је

$$p_1(N_k) = p_1(B_k) = \pm 2(2k+1)\iota,$$

погледати [23, Лема 3], а за детаљно извођење и [22, Одељак 6.2]. Према Теореми 1.18, важи

$$\tau(N_k) = \frac{7}{45} p_2\big([N_k]\big) - \frac{1}{45}\left(p_1 \smile p_1\right)\big([N_k]\big) \equiv_7 -5(4k+2)^2 \equiv_7 (2k+1)^2. \tag{5}$$

Како је $H^4(B_k) \cong \mathbb{Z}$, квадратна форма многострукости B_k из Дефиниције 1.17 је једнодимензиона, па је њен индекс једнак $\tau(B_k) = \pm 1$. Диск D^8 је контрактибилан и за њега важи $\tau(D^8) = 0$. Из [23, Лема 1] следи да је

$$\tau(N_k) = \tau(B_k) - \tau(D^8) = \tau(B_k) = \pm 1.$$

Израз (5) постаје $(2k+1)^2 \equiv_7 \pm 1$. Како -1 није квадратни остатак по модулу 7, остаје само $(2k+1)^2 \equiv_7 1$, што је и требало доказати. □

Вредно је напомене да се коефицијенти у линеарној комбинацији (4) добијају из развоја степених редова неких генеришућих функција и повезани су са Бернулијевим бројевима. Конкретно, број 7 који се јавља као коефицијент и који је заслужан за посматрање дељивости са 7, нема никакве директне везе са тим што се посматрају сфере димензије 7.

Последица 1.20. Постоји многострукост која је хомеоморфна, али није и дифеоморфна сфери S^7.

Доказ. Посматрајмо све тоталне просторе $M_{k,l}$ који су дефинисани у (3). У случају када је $k + l = -1$, у Леми 1.16 смо доказали да су ти простори хомеоморфни сфери S^7. По Теореми 1.19, ако наметнемо и услов $(k-l)^2 \not\equiv_7 1$, онда $M_{k,l}$ није дифеоморфно стандардној сфери S^7. Један пример егзотичне седмодимензионе сфере била би многострукост $M_{1,-2}$. □

На неки начин је могуће дати структуру скупу свих глатких структура свих многострукости дате димензије, или другим речима, скупу свих глатких многострукости дате димензије. За две глатке оријентисане повезане многострукости M_1^n и M_2^n, можемо дефинисати операцију повезане суме међу њима. Нека су $D_1 \hookrightarrow M_1$ и $D_2 \hookrightarrow M_2$ глатко уложени стандардни глатки дискови димензије n. Повезану суму $M_1 \# M_2$ добијамо тако што скупове $M_1 \setminus \operatorname{int}(D_1)$ и $M_2 \setminus \operatorname{int}(D_2)$ лепимо дифеоморфизмом по скупу $\partial D_1 \approx \partial D_2 \approx S^{n-1}$ (за дифеоморфизам се може узети id после поменуте идентификације), тако да другој многострукости обрнемо оријентацију. Ова операција је добро дефинисана, до на дифеоморфизам који чува оријентацију. Лако се види да је она комутативна и асоцијативна и да је јединични елемент сфера, јер важи $M^n \# S^n \approx M^n$. Дакле, скуп класа глатких многострукости димензије n (до на оријентисани дифеоморфизам) са операцијом повезане суме чини комутативни моноид, који ћемо означити са $\mathcal{S}_n$.

Пример 1.21. У димензији два нам је познато да су тополошке оријентисане затворене површи уопштени торуси произвољног рода $g \in \mathbb{N}_0$. Повезана сума торуса рода g_1 и торуса рода g_2 даје торус рода $g_1 + g_2$, па они чине моноид $\mathbb{N}_0$. Дакле, моноид $\mathcal{S}_2$ има подмоноид изоморфан са $\mathbb{N}_0$.

Већ у димензији два видимо да нема смисла одмах говорити о структури групе. Наиме, из $T^2 \# U \approx S^2$ би следило

$$\mathbb{Z}^2 * \pi_1(U) \cong \pi_1(T^2) * \pi_1(U) \cong \pi_1(T^2 \# U) \cong \pi_1(S^2) \cong 1,$$

па инверз класе торуса не може да постоји. Међутим, можемо се ограничити на мању класу многострукости које посматрамо и уочити подмоноид $\Theta_n \subset \mathcal{S}_n$ дат са

$$\Theta_n = \{\text{глатке многострукости } M^n \mid M \text{ је хомеоморфно са } S^n\}.$$

Испоставља се да је Θ_n група за $n \in \mathbb{N} \setminus \{4\}$. У димензији четири није познато ништа о структури моноида Θ_4.

Још у 19. веку се знало да су Θ_1 и Θ_2 тривијалне групе. Важи и да је група Θ_3 тривијална, али тај резултат је чекао Перелмана и разрешење глатке Поенкареове хипотезе почетком овог века. Што се димензије седам тиче, из разматрања у овом одељку закључујемо да група Θ_7 није тривијална. Милнор је у даљем раду, а у сарадњи са Кервером [17] дао бољи опис група Θ_n. Најбитнији глобални закључак који су донели је да су Θ_n коначне Абелове групе за $n > 4$. Пошто су прве три групе тривијалне, овај резултат практично важи за $n \neq 4$. У истом раду они су дали и број елемената група Θ_n за мале n, а касније су их и конкретно израчунали. Преглед група Θ_n за $n \leqslant 13$ дат је у Табели 1 испод.

Од 27 егзотичних сфера у димензији седам, постоје и оне које се не добијају поступком који је овде описан. Оних које се заиста добијају као S^3 раслојења над S^4 има 15 и њих су описали Илс и Кипер [16].

О моноиду Θ_4 се мало зна. Није чак познато ни да ли постоји егзотична сфера S^4, тј. није решено питање (не)тривијалности овог моноида. Међутим, познато је да или не постоји ниједна таква или их има бесконачно много.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Θ_n	0	0	0	?	0	0	$\mathbb{Z}_{28}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_{992}$	0	$\mathbb{Z}_3$

Табела 1: Групе Θ_n, за $n \leqslant 13$.

Нека је $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ низ од $n+1$ природних бројева. Дефинишемо Брискорнове варијетете као

$$W^{2n-1}(a) = \{z_0^{a_0} + z_1^{a_1} + \ldots + z_n^{a_n} = 0\} \cap \{|z_0|^2 + \ldots + |z_n|^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^{n+1}. \tag{6}$$

То су глатке многострукости димензије $2n-1$ (први скуп задаје многострукост кодимензије 2, а други скуп многострукост кодимензије 1), где се глатка структура наслеђује инклузијом. Многе егзотичне сфере је могуће конструисати на овај начин. На пример, све глатке сфере из Θ_7 се могу видети као Брискорнови варијетети

$$W^7(2, 2, 2, 3, 6k-1), \quad k \in \{1, 2, \ldots, 28\},$$

видети [5].

1.4 Веза између дифеоморфизама диска и глатких сфера

У циљу описивања наведене везе биће потребно разрадити причу новим појмовима. За почетак, то је појам глатке псеудоизотопије, који личи на појам глатке изотопије.

Дефиниција 1.22. Нека је M глатка многострукост и $f, g \in \mathrm{Diff}_c(M)$. За f и g кажемо да су *глатко псеудоизотопни* ако постоји дифеоморфизам $F : M \times [0,1] \to M \times [0,1]$ тако да је:

- (i) $F(x,0) = (f(x),0)$ и $F(x,1) = (g(x),1)$, за свако $x \in M$.
- (ii) $F|_{\partial M \times [0,1]} = \mathrm{id}$.

Функцију F из дефиниције називамо псеудоизотопијом. Скуп свих псеудоизотопија где је $f = \mathrm{id}$ и g произвољно означавамо са $C(M)$.

Важи да је релација псеудоизотопије слабија од релације изотопије, тј. свака изотопија је уједно и псеудоизотопија. Оно што недостаје псеудоизотопији да постане изотопија је што не важи да је $\pi_2 = \pi_2 \circ F$, тј. не одржава се $[0,1]$ координата из оригинала у слици. Једно од питања која се могу поставити је када важи обрнуто, односно када се изотопија и псеудоизотопија поклапају. Делимичан одговор на то питање дао је Церф.

Теорема 1.23. [7, Теорема 0] Нека је M^n глатка компактна многострукост димензије $n \geqslant 5$ која је просто повезана, тј. која је повезана и важи $\pi_1(M) \cong 0$. Онда важи $\pi_0(C(M)) \cong 0$, односно група псеудоизотопија од M је повезана.

Последица 1.24. [18, Последица 23.1.6.] Ако је M^n глатка компактна просто повезана многострукост димензије $n \geqslant 5$, онда се релације псеудоизотопије и изотопије поклапају.

Доказ. Свака изотопија је уједно и псеудоизотопија, па остаје да покажемо други смер. Нека је $F : M \times [0,1] \to M \times [0,1]$ псеудоизотопија од f до g. Онда је

$$G = \left(f^{-1} \times \mathrm{id}_{[0,1]}\right) \circ F$$

псеудоизотопија од id до $f^{-1} \circ g$. Следи да $G \in C(M)$, па према Теореми 1.23 G је путно повезано са $\mathrm{id}_{M \times [0,1]}$. То значи да имамо пут $G_t : [0,1] \to C(M)$ такав да је $G_0 = \mathrm{id}_{M \times [0,1]}$ и $G_1 = G$. Рестрикцијом пресликавања G_t на $M \times \{1\}$ добијамо изотопију између

$$\begin{aligned} G_0|_{M \times \{1\}} &= \mathrm{id}_{M \times [0,1]}\Big|_{M \times \{1\}} = \mathrm{id}_M \text{ и} \\ G_1|_{M \times \{1\}} &= G|_{M \times \{1\}} = f^{-1} \circ g. \end{aligned}$$

Коначно, $f \circ G_t|_{M \times \{1\}}$ ће бити изотопија од f до g. □

Релација псеудоизотопије је релација еквиваленције на скупу $\mathrm{Diff}_c(M)$. Наравно, то се одржава и када су у питању дифеоморфизми који чувају оријентацију, на оријентабилној многострукости. Скуп класа еквиваленције дифеоморфизама који чувају оријентацију при глаткој псеудоизотопији на оријентисаној многострукости M ћемо означавати са $\mu\mathrm{Diff}^+(M)$.

Пресликавање

$$\mathrm{Diff}^+(D^n) \to \mathrm{Diff}^+(S^{n-1}), \quad f \mapsto f|_{S^{n-1}}$$

дато као рестрикција на границу је фибрација. Фибра изнад id је $\mathrm{Diff}^+_c(D^n)$, па тако по Теореми 1.13 имамо дуг тачан низ у хомотопији који се завршава са

$$\ldots \to \pi_1\mathrm{Diff}^+(S^{n-1}) \to \pi_0\mathrm{Diff}^+_c(D^n) \to \pi_0\mathrm{Diff}^+(D^n) \to \pi_0\mathrm{Diff}^+(S^{n-1}).$$

Последњи хомоморфизам није сурјективан, али се низ може продужити до тачног који се завршава нулом на следећи начин:

$$\ldots \to \pi_0\mathrm{Diff}^+_c(D^n) \to \pi_0\mathrm{Diff}^+(D^n) \to \pi_0\mathrm{Diff}^+(S^{n-1}) \to \mu\mathrm{Diff}^+(S^{n-1}) \to 0. \tag{7}$$

Сада ћемо се позабавити појмом *уврнутих сфера*[2]. Пођимо од дифеоморфизма $f : S^{n-1} \to S^{n-1}$ који чува оријентацију. Две копије диска D^n можемо залепити по граници дифеоморфизмом f и добити резултат $\Sigma_f = D^n \cup_f D^n$. Добијена многострукост је хомеоморфна, али не мора бити дифеоморфна сфери S^n. Одатле имамо добро дефинисано пресликавање

$$\Sigma_{(\cdot)} : \mathrm{Diff}^+(S^{n-1}) \to \Theta_n. \tag{8}$$

Није тешко видети да је Σ хомоморфизам моноида. У случају $n \neq 4$, када су и домен и кодомен групе, Σ је хомоморфизам група. Уврнута сфера Σ_f је одређена класом псеудоизотопије пресликавања f. Другим речима, ако су пресликавања f и g псеудоизотопна, онда су сфере Σ_f и Σ_g дифеоморфне. Зато можемо хомоморфизам (8) да запишемо као

$$\Sigma_{(\cdot)} : \mu\mathrm{Diff}^+(S^{n-1}) \to \Theta_n. \tag{9}$$

Смејл је показао (погледати доказ [18, Теорема 17.3.7.]) да је за $n \geqslant 6$ могуће сваку глатку $n-$сферу (елемент групе Θ_n) добити лепљењем два диска D^n по граници дуж дифеоморфизма сфере S^{n-1} који чува оријентацију. Другим речима, свака глатка сфера се може реализовати као уврнута сфера. Алгебарски, то нам говори да је хомоморфизам (9) сурјективан.

Посматрајмо глатку инклузију $D^n \overset{i}{\hookrightarrow} S^n$. Дефинишемо пресликавање из $\mathrm{Diff}^+_c(D^n)$ у $\mathrm{Diff}^+(S^n)$ са

$$f \mapsto \tilde{f}, \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in i(D^n), \\ x, & x \notin i(D^n). \end{cases}$$

Оно задаје хомоморфизам $\pi_0\mathrm{Diff}^+_c(D^n) \to \pi_0\mathrm{Diff}^+(S^n)$, који је заправо изоморфизам [18, Последица 17.3.10.]. За $n \geqslant 5$, према Последици 1.24, тај хомоморфизам се поклапа са хомоморфизмом (9).

Следећи корак је показати да је пресликавање (9) инјективно.

Лема 1.25. [18, Пропозиција 23.2.3.] За $f \in \mathrm{Diff}^+(S^{n-1})$, сфера Σ_f је дифеоморфна сфери S^n ако и само ако је f псеудоизотопно id.

Доказ. $\Leftarrow$: Означимо са F псеудоизотопију од id до f. Уз помоћ те псеудоизотопије ћемо конструисати дифеоморфизам између Σ_f и S^n, тако што на одређеном појасу мењамо пресликавање id до пресликавања f којим се лепи.

---

[2] На енглеском: twisted spheres

Означимо $D^n_\rho = \{x \in D^n \mid \|x\| \leqslant \rho\}$. Дефинишимо дифеоморфизам g између $\Sigma_f \cong D^n \cup_f D^n$ и S^n са

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{ако } x \in D^n_{1/2}, \text{ као подскуп првог диска } D^n, \\ F(2\|x\| - 1, \varphi), & \text{ако } x \text{ припада првом диску } D^n \text{ и } \|x\| \geqslant 1/2, \\ x, & \text{ако } x \text{ припада другом диску } D^n. \end{cases}$$

$\Rightarrow$: Претпоставимо да имамо дифеоморфизам $g : \Sigma_f \to S^n$. Без умањења општости, нека g чува оријентацију (иначе га можемо укомпоновати са дифеоморфизмом који мења оријентацију). Довољно је доказати да се дифеоморфизам f од $S^{n-1} = \partial D^n$ може продужити до дифеоморфизма целог диска D^n. Наиме, из дугог тачног низа (7) важило би

$$[f] \in \mathrm{Im}\left(\pi_0 \mathrm{Diff}^+(D^n) \to \pi_0 \mathrm{Diff}^+(S^{n-1})\right) = \ker\left(\pi_0 \mathrm{Diff}^+(S^{n-1}) \to \mu \mathrm{Diff}^+(S^{n-1})\right),$$

а одатле је $0 = [f] \in \mu\mathrm{Diff}^+(S^{n-1})$, што нам је и потребно.

Теорема о диску од Палаиса [28] тврди да су два исто оријентисана улагања диска D^n у $n-$димензиону глатку повезану оријентабилну многострукост међусобно изотопна. Ова теорема ће нам бити кључна у конструкцији потребног продужења.

Означимо са

$$i_1 : D^n \hookrightarrow D^n \cup_f D^n = \Sigma_f \text{ и } i_2 : D^n \hookrightarrow D^n \cup_f D^n = \Sigma_f$$

редом улагања диска D^n као први, односно као други диск D^n у Σ_f. По теореми о диску, можемо наћи дифеоморфизам $h : S^n \to S^n$ такав да композиција

$$D^n \overset{i_1}{\hookrightarrow} D^n \cup_f D^n = \Sigma_f \cong S^n \xrightarrow{h} S^n$$

буде стандардно улагање диска D^n као горње хемисфере од S^n. Одатле следи да је слика пресликавања

$$j : D^n \overset{i_2}{\hookrightarrow} D^n \cup_f D^n = \Sigma_f \cong S^n \xrightarrow{h} S^n$$

доња хемисфера од S^n. Такође, важи да је рестрикција пресликавања j на $\partial D^n = S^{n-1}$ једнака баш пресликавању f (у композицији са стандардном инклузијом $S^{n-1} \hookrightarrow S^n$ као екватора од S^n). Идентификујући доњу хемисферу од S^n са диском D^n, пресликавање j даје тражено продужење.

□

Теорема 1.26. [18, Теорема 23.2.4.] За $n \geqslant 6$, сурјективно пресликавање

$$\pi_0 \mathrm{Diff}^+_c(D^{n-1}) \to \Theta_n$$

је и инјективно. Односно, важи $\pi_0\mathrm{Diff}^+_c(D^{n-1}) \cong \Theta_n$.

Доказ. Довољно је да докажемо да је језгро овог пресликавања тривијално. Ако је $[f] \in \pi_0\mathrm{Diff}^+_c(D^{n-1}) \cong \pi_0(\mathrm{Diff}^+(S^{n-1}))$ у језгру, онда је по Леми 1.25 пресликавање f псеудоизотопно идентитети. Даље, по Последици 1.24 је пресликавање f изотопно идентитети, а то значи да је класа $[f]$ неутрални елемент у групи $\pi_0\mathrm{Diff}^+(S^{n-1}) \cong \pi_0\mathrm{Diff}^+_c(D^{n-1})$. □

На основу ове теореме и гледајући Табелу 1 можемо да дамо закључак о групи класа пресликавања неких дискова. На пример, диск D^6 има 27 егзотичних дифеоморфизама (до на изотопију), док их рецимо диск D^{11} уопште нема. Остаје питање шта се дешава у малим димензијама, односно за $n \leqslant 4$.

У димензији $n = 4$ (као што је до сада то обично бивало) ништа се не зна о групи $\mathrm{Diff}_{\mathrm{c}}^{+}(D^n)$. Многи математичари не желе ни да поставе икакве хипотезе. У првим трима димензијама је ситуација доста јаснија и опис групе $\mathrm{Diff}_{\mathrm{c}}^{+}(D^n)$ је дат следећом теоремом. За $n = 1$ ситуација је од давнина позната, за $n = 2$ се приписује Смејлу, а за $n = 3$ Хачеру.

Теорема 1.27. За $n \in \{1, 2, 3\}$, све хомотопске групе простора $\mathrm{Diff}_{\mathrm{c}}^{+}(D^n)$ су тривијалне (каже се да је простор $\mathrm{Diff}_{\mathrm{c}}^{+}(D^n)$ слабо контрактибилан).

Између осталог, ова теорема каже да важи $\pi_0 \mathrm{Diff}_{\mathrm{c}}^{+}(D^1) \cong \pi_0 \mathrm{Diff}_{\mathrm{c}}^{+}(D^2) \cong \pi_0 \mathrm{Diff}_{\mathrm{c}}^{+}(D^3) \cong 0$, тј. ти простори су повезани. Из овога видимо да Теорема 1.26 може да се формулише за све $n \in \mathbb{N} \setminus \{3, 4\}$.

Закључке за диск можемо лако да преведемо на закључке за еуклидски простор $\mathbb{R}^n$.

Лема 1.28. Важи $\mathrm{Diff}_{\mathrm{c}}^{+}(\mathbb{R}^n) = \mathrm{Diff}_{\mathrm{c}}^{+}(D^n)$.

Доказ. Нека је $\varphi : \mathrm{int}(D^n) \to \mathbb{R}^n$ неки дифеоморфизам ових скупова. Ако је $\psi \in \mathrm{Diff}_{\mathrm{c}}^{+}(\mathbb{R}^n)$ произвољан дифеоморфизам са компактним носачем, онда конјуговањем $\varphi^{-1} \circ \psi \circ \varphi$ добијамо дифеоморфизам диска D^n који има компактан носач у $\mathrm{int}(D^n)$. Можемо урадити и обрнуто, ако кренемо од $\psi \in \mathrm{Diff}_{\mathrm{c}}^{+}(\mathbb{D}^n)$, имамо да важи $\varphi \circ \psi \circ \varphi^{-1} \in \mathrm{Diff}_{\mathrm{c}}^{+}(\mathbb{R}^n)$. Ова два придруживања су међусобно инверзна и бијективност је успостављена. $\square$

2 Егзотичне структуре у симплектичкој категорији

2.1 Симплектичка и контактна геометрија

Овде ће бити дат увод у симплектичку и контактну геометрију са свим појмовима који су потребни за даље разумевање текста. Ове области су шире од неколико реченица које ће бити овде изложене, па се заинтересован читалац упућује на [9, 12, 21, 40].

Дефиниција 2.1. *Симплектичка многострукост* је уређен пар (M, ω), где је M глатка многострукост и ω недегенерисана затворена диференцијална 2-форма на M. Овде, појам недегенерисаности подразумева да за свако $p \in M$ антисиметрично билинеарно пресликавање $(X, Y) \mapsto \omega_p(X, Y)$ буде недегенерисано, тј. важи да за свако ненула $X \in T_pM$ увек постоји $Y \in T_pM$ тако да је $\omega_p(X, Y) \neq 0$. Затвореност форме ω подразумева да је $\mathrm{d}\omega = 0$.

Један од првих закључака који се може направити о симплектичким многострукостима је једна рестрикција на њихову димензију.

Лема 2.2. Симплектичка многострукост (M^n, ω) је парне димензије.

Доказ. Посматрајмо неки тангентни простор T_pM. На њему је ω_p антисиметрична билинеарна форма, што значи да се у некој бази представља као $\omega_p(X, Y) = X^TAY$, за векторе X, Y из векторског простора T_pM, где је A антисиметрична матрица. То значи да важи $A = -A^T$, а израчунавање детерминанте даје

$$\det(A) = \det\left(-A^T\right) = (-1)^n \det\left(A^T\right) = (-1)^n \det(A).$$

Из недегенерисаности форме имамо недегенерисаност матрице, а из тога закључујемо $(-1)^n = 1$, тј. $2 \mid n$. ☐

Овиме смо добили да непарнодимензионе многострукости не могу бити симплектичке. Са друге стране, ни све парнодимензионе неће бити симплектичке. Познато је да сфера S^4, иако је парне димензије, не поседује симплектичку структуру. Следећа лема нам даје још неке тополошке рестрикције. Означимо са $\Omega^k(M)$ скуп диференцијалних k-форми на M и са $H^n_{\mathrm{dR}}(M)$ означимо n-ту де Рамову кохомолошку групу од M.

Лема 2.3. За затворену симплектичку многострукост (M^{2n}, ω) је $H^2_{\mathrm{dR}}(M) \neq 0$.

Доказ. Претпоставимо супротно. Онда $[\omega] \in H^2_{\mathrm{dR}}(M) = 0$ мора бити нула. То значи да је ω тачна форма, па постоји неко $\eta \in \Omega^1(M)$ тако да је $\omega = \mathrm{d}\eta$. Из недегенерисаности форме ω следи да је ω^n форма запремине на M. По Стоксовој теореми онда имамо

$$0 \neq \int\limits_M \omega^n = \int\limits_M \mathrm{d}(\eta \wedge \omega^{n-1}) = \int\limits_{\partial M} \eta \wedge \omega^{n-1} = \int\limits_{\emptyset} \eta \wedge \omega^{n-1} = 0,$$

што је контрадикција са претпоставком. ☐

Следи неколико примера симплектичких многострукости са којима ћемо се срести касније.

Пример 2.4. $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{\mathrm{st}})$. Ако су координате на $\mathbb{R}^{2n}$ дате са $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$, онда је

$$\omega_{\mathrm{st}} = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}y_1 + \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}y_2 + \ldots + \mathrm{d}x_n \wedge \mathrm{d}y_n$$

стандардна симплектичка форма на $\mathbb{R}^{2n}$. Приметимо да је ова форма и тачна, јер се може представити као диференцијал форме

$$\lambda_{\mathrm{st}} = x_1 \mathrm{d}y_1 + x_2 \mathrm{d}y_2 + \ldots + x_n \mathrm{d}y_n.$$

Овде је згодно поменути и $(\mathbb{C}^n, \omega_{\mathrm{st}})$, где $\mathbb{C}^n$ долази са координатама $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Можемо успоставити кореспонденцију

$$(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \overset{\cong}{\longleftrightarrow} (x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n) = (z_1, \ldots, z_n)$$

између $\mathbb{R}^{2n}$ и $\mathbb{C}^n$. Стандардну симплектичку форму на $\mathbb{C}^n$ добијамо из стандардне симплектичке форме на $\mathbb{R}^{2n}$ повлачењем и једнака је

$$\omega_{\mathrm{st}} = -\frac{i}{2} \left(\mathrm{d}z_1 \wedge \mathrm{d}\overline{z_1} + \ldots + \mathrm{d}z_n \wedge \mathrm{d}\overline{z_n} \right),$$

где су $\mathrm{d}z_k = \mathrm{d}x_k + i\mathrm{d}y_k$ и $\mathrm{d}\overline{z_k} = \mathrm{d}x_k - i\mathrm{d}y_k$.

Пример 2.5. $(T^*M, \omega_{\mathrm{can}})$. Означимо са T^*M котангентно раслојење многострукости M^n и са $\pi : T^*M \to M$ канонску пројекцију. Котангентно раслојење је важан објекат у симплектичкој геометрији, јер су диференцијалне 1-форме на многострукости M његова глатка сечења. Без задавања икакве даље стуктуре, можемо дефинисати *канонску 1-форму* $\lambda \in \Omega^1(T^*M)$ на многострукости T^*M са

$$\lambda_p(\xi) = p(\mathrm{d}\pi_p(\xi)),$$

где $p \in T^*M$ и $\xi \in T_pT^*M$. Канонску симплектичку форму сада можемо дефинисати као

$$\omega_{\mathrm{can}} = -\mathrm{d}\lambda.$$

Нека су $(q_1, \ldots, q_n)$ локалне координате у карти $U \subset M$ и нека су $(p_1, \ldots, p_n)$ дуалне координате на T^*U, тј. такве да $p \in T^*U$ записујемо као $p = \sum p_k e_k$, где важи $e_i \left(\frac{\partial}{\partial q_j} \right) = \delta_{ij}$. Запис форме λ у овим локалним координатама је

$$\lambda = p\mathrm{d}q = p_1 \mathrm{d}q_1 + \ldots + p_n \mathrm{d}q_n,$$

док је локални запис симплектичке форме

$$\omega_{\mathrm{can}} = \mathrm{d}q \wedge \mathrm{d}p = \mathrm{d}q_1 \wedge \mathrm{d}p_1 + \ldots + \mathrm{d}q_n \wedge \mathrm{d}p_n.$$

Пример 2.6. Оријентабилне површи. Свака оријентабилна површ (многострукост димензије 2) је симплектичка, а за симплектичку форму можемо узети форму површине. Специјално, и сфера S^2 је симплектичка многострукост. Можемо се запитати које се све сфере S^n могу опремити симплектичком структуром. Одговор нам даје Лема 2.3, јер само за $n = 2$ важи $H^2_{\mathrm{dR}}(S^n) \cong H^2(S^n; \mathbb{R}) \neq 0$.

Пример 2.7. $(\mathbb{C}P^n, \omega_{\mathrm{FS}})$. Комплексни пројективни простор посматрамо као

$$\mathbb{C}P^n = \left(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}\right) \Big/ \left(\mathbb{C} \setminus \{0\}\right)$$

и са $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}P^n$ означимо природну пројекцију. Нека је i инклузија

$$\{(z_0, z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid |z_0|^2 + |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2 = 1\} = S^{2n+1} \xhookrightarrow{i} \mathbb{C}^{n+1}$$

и $\tilde{\pi} = \pi \circ i$ рестрикција пројекције на S^{2n+1}. Може се показати да постоји јединствена диференцијална 2-форма ω_{FS} на $\mathbb{C}P^n$ тако да је

$$i^*\omega_{\mathrm{st}} = \tilde{\pi}^*\omega_{\mathrm{FS}},$$

где је ω_{st} из Примера 2.4. И више од тога, важи да је ω_{FS} симплектичка форма и зове се *Фубини-Студијева форма.*

Ако имамо две симплектичке многострукости, (M_1, ω_1) и (M_2, ω_2), можемо направити нову (тачније, бесконачно много њих). Производ $M_1 \times M_2$ са симплектичком формом $\lambda_1 \pi_1^* \omega_1 + \lambda_2 \pi_2^* \omega_2$, за $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ је симплектичка многострукост.

Изоморфизам две симплектичке многострукости, поред тога што је дифеоморфизам и чува глатку структуру, мора чувати симплектичку форму.

Дефиниција 2.8. Дате су две симплектичке многострукости (M_1, ω_1) и (M_2, ω_2). Симплектички изоморфизам, тј. *симплектоморфизам* између њих је пресликавање

$$\varphi : (M_1, \omega_1) \to (M_2, \omega_2)$$

које је дифеоморфизам глатких многострукости M_1 и M_2 и $\varphi^*\omega_2 = \omega_1$.

За симплектичку многострукост (M, ω) можемо посматрати симплектоморфизме $\varphi : (M, \omega) \to (M, \omega)$. Скуп свих оваквих симплектоморфизама ћемо означити са $\mathrm{Symp}(M, \omega)$ или само $\mathrm{Symp}(M)$ ако се симплектичка структура подразумева. Симболички пишемо

$$\mathrm{Symp}(M, \omega) = \{\varphi \in \mathrm{Diff}(M) \mid \varphi^*\omega = \omega\}.$$

Једно од основних тврђења о скупу $\mathrm{Symp}(M, \omega)$ је да је он подгрупа групе $\mathrm{Diff}(M)$. То следи из чињенице да за $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Symp}(M, \omega)$ важи

$$(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})^*\omega = (\varphi_1^{-1})^*(\varphi_2^*\omega) = (\varphi_1^{-1})^*\omega = \omega.$$

Симплектичка многострукост (M, ω) је канонски оријентисана. Наиме, за форму запремине се може узети $\omega^n \neq 0$. Следи да је сваки симплектоморфизам од M уједно и дифеоморфизам који чува оријентацију. Топологија коју посматрамо на групи $\mathrm{Symp}(M)$ је наслеђена од $\mathrm{Diff}(M)$, односно C^∞ топологија. Важи да је група $\mathrm{Symp}(M)$ затворена у групи $\mathrm{Diff}(M)$. Међутим, помало изненађујући резултат Елијашберга и Громова тврди мало јачу верзију ове чињенице. Иако причамо о дифеоморфизмима, биће довољна само топологија равномерне непрекидности на подгрупи $\mathrm{Symp}(M)$ да се закључи њена затвореност.

Теорема 2.9. [21, Теорема 12.2.1] Нека је M симплектичка многострукост. Тада је група $\mathrm{Symp}(M)$ затворена у C^0 топологији у групи $\mathrm{Diff}(M)$.

По угледу на Дефиницију 1.3 где је дефинисан скуп Diff_c, можемо дефинисати и скуп Symp_c.

Дефиниција 2.10. За симплектичку многострукост (M, ω) дефинишемо скуп

$$\mathrm{Symp}_\mathrm{c}(M, \omega) = \{\varphi \in \mathrm{Symp}(M, \omega) \mid \mathrm{supp}(\varphi) \text{ је компактан у } \mathrm{int}(M)\}$$

и зовемо га скуп симплектоморфизама од M са компактним носачем. Под унутрашњошћу се овде подразумева скуп $\mathrm{int}(M) = M \setminus \partial M$.

Напомена. Ако је симплектичка многострукост M затворена, онда су групе $\mathrm{Symp}_\mathrm{c}(M)$ и $\mathrm{Symp}(M)$ идентичне. У случају да M има границу, онда симплектоморфизам из $\mathrm{Symp}_\mathrm{c}(M)$ мора бити једнак id у некој околини границе.

Дефиниција 2.11. За дато векторско поље X на многострукости M дефинишемо његов *ток* као фамилију дифеоморфизама φ_t, $t \in \mathbb{R}$ која решава следећу диференцијалну једначину са почетним условом

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_t = X \circ \varphi_t, \quad \varphi_0 = \mathrm{id}. \tag{10}$$

Дефиниција 2.12. За глатку многострукост M и векторско поље X на M пресликавање $i_X : \Omega^{*+1}(M) \to \Omega^*(M)$, које је дефинисано као контракција форме α векторским пољем X:

$$i_X\alpha(X_1, X_2, \ldots, X_*) = \alpha(X, X_1, \ldots, X_*),$$

називамо *унутрашњим диференцирањем.* Честа ознака је и $i_X\alpha = X \lrcorner \alpha$.

Дефиниција 2.13. Нека је (M, ω) симплектичка многострукост и $H : M \to \mathbb{R}$ глатка функција на њој (која може и не мора бити временски зависна). Векторско поље X_H које је симплектички градијент за H, тј. дефинисано са

$$i_{X_H}\omega = \mathrm{d}H$$

назива се *Хамилтоново векторско поље* за *Хамилтонијан* H. Оно увек постоји, јер је ω недегенерисана форма. Ток векторског поља X_H дефинисан са (10) састоји се од дифеоморфизама које зовемо *Хамилтонови дифеоморфизми.*

Основно тврђење о Хамилтоновим дифеоморфизмима сумирано је следећом лемом.

Лема 2.14. Сваки Хамилтонов дифеоморфизам је и симплектоморфизам.

Доказ. Нека је φ_t фамилија Хамилтонових дифеоморфизама која потиче од Хамилтонијана H. Имамо

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_t^*\omega = \varphi_t^*\left(i_{X_H}\mathrm{d}\omega + \mathrm{d}i_{X_H}\omega\right) = \varphi_t^*\left(\mathrm{d}(\mathrm{d}H)\right) = 0.$$

Из $\varphi_0^*\omega = \mathrm{id}^*\omega = \omega$, следи да је $\varphi_t^*\omega = \omega$. ☐

Следећа лема, која се често назива Мозеровом теоремом стабилности, говори да се симплектичке особине неће значајно променити ако форму пертурбујемо унутар кохомолошке класе.

Лема 2.15. [9, Теорема 7.3] Нека је M компактна многострукост и ω_t, $t \in \mathbb{R}$ глатка фамилија симплектичких форми на M које су све у истој кохомолошкој класи. Онда постоји изотопија ψ_t на M тако да

$$\psi_t^* \omega_t = \omega_0 \ \text{ и } \ \psi_0 = \mathrm{id}.$$

Доказ. Форме $\omega_t - \omega_0$ су тачне, па су зато и форме

$$\dot{\omega}_t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\omega_t = \lim_{h\to 0} \frac{\omega_{t+h} - \omega_t}{h}$$

тачне. Зато постоји фамилија $\sigma_t \in \Omega^1(M)$ тако да је $\dot{\omega}_t = \mathrm{d}\sigma_t$. Изаберимо (временски зависно) векторско поље X_t тако да важи $i_{X_t}\omega_t = -\sigma_t$. Ово је увек могуће урадити јер су ω_t недегенерисане. Конструисаћемо ψ_t као ток векторског поља X_t, тј. као решење диференцијалне једначине

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_t = X_t \circ \psi_t, \quad \psi_0 = \mathrm{id}.$$

Да је $\psi_t^*\omega_t$ константно доказаћемо стандардним поступком диференцирања

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_t^*\omega_t = \psi_t^*\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\omega_t + i_{X_t}\mathrm{d}\omega_t + \mathrm{d}i_{X_t}\omega_t\right) = \psi_t^*\left(\mathrm{d}\sigma_t + 0 - \mathrm{d}\sigma_t\right) = 0.$$

За $t = 0$ је $\psi_0^*\omega_0 = \mathrm{id}^*\omega_0 = \omega_0$, па закључујемо да је $\psi_t^*\omega_t = \omega_0$. ☐

Дефиниција 2.16. *Лагранжева подмногострукост* симплектичке многострукости (M^{2n}, ω) је подмногострукост L^n за коју важи $\omega|_L = 0$.

Пример 2.17. Глатка многострукост M је Лагранжева подмногострукост у $(T^*M, \omega_{\mathrm{can}})$, уз идентификацију M са нултим сечењем $\mathcal{O}_M$ од T^*M:

$$M \approx \mathcal{O}_M = \{(q,0) \in T^*M\} \subset \{(q,p) \in T^*M\} = T^*M.$$

То следи из једноставне чињенице да је $\omega_{\mathrm{can}} = \sum \mathrm{d}q_j \wedge \mathrm{d}p_j$ у локалним координатама, и $\mathrm{d}p_j|_{T\mathcal{O}_M} = 0$.

Симплектичка геометрија се дешава на многострукостима парне димензије (Лема 2.2). Са друге стране, контактна геометрија је њен непарнодимензиони комплемент.

Дефиниција 2.18. Нека је M глатка многострукост димензије $2n+1$. Посматрајмо глатку дистрибуцију хиперравни $\xi \subset TM$, тј. глатко подраслојење од TM кодимензије 1. Локално је $\xi = \ker \alpha$, за неку 1-форму α. Ми ћемо се задржати на оним ξ који овакву форму допуштају глобално. У случају да је

$$\alpha \wedge (\mathrm{d}\alpha)^n \neq 0$$

форма запремине на M, многострукост заједно са дистрибуцијом (M, ξ) зовемо *контактна многострукост*. Избор контактне форме α није јединствен и зато се у дефиницији инсистира на дистрибуцији ξ.

Од контактне многострукости (M, ξ) можемо доћи до симплектичке поступком *симплектизације.* Уочимо многострукост $M \times \mathbb{R}$ и дефинишимо $\omega = \mathrm{d}(e^t\alpha)$, где је t координата на $\mathbb{R}$. Ова форма заиста јесте симплектичка, јер имамо

$$\omega^n = (e^t \mathrm{d}t \wedge \alpha + e^t \mathrm{d}\alpha)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^t \mathrm{d}t \wedge \alpha)^k \wedge (e^t \mathrm{d}\alpha)^{n-k} = ne^{nt}\mathrm{d}t \wedge \alpha \wedge (\mathrm{d}\alpha)^{n-1} \neq 0.$$

Могуће је дефинисати симплектизацију и када немамо глобално задату форму α, за детаље погледати [40, Одељак 4.3.].

Дефиниција 2.19. [12, Лема/Дефиниција 1.1.9] На контактној многострукости са контактном формом α, постоји јединствено векторско поље R_α за које важе следећи услови:

- (i) $\alpha(R_\alpha) = 1$,
- (ii) $\mathrm{d}\alpha(R_\alpha, \cdot) = 0$.

Такво R_α зовемо *Рибово векторско поље.*

2.2 Егзотични симплектоморфизми

Настављајући аналогију са групом дифеоморфизама, и овде ће нас занимати шта је са компонентама (путне) повезаности групе $\mathrm{Symp}_c(M)$. Дефинисаћемо сада појмове који се појављују у наслову, који ће чинити централне објекте у овом раду.

Дефиниција 2.20. За два симплектоморфизма $\varphi_0, \varphi_1 \in \mathrm{Symp}_c(M)$ ћемо рећи да су *симплектички изотопна* ако постоји глатка изотопија $(\varphi_t)_{0 \leqslant t \leqslant 1}$ са компактним носачем између њих, таква да су φ_t симплектоморфизми из $\mathrm{Symp}_c(M)$, за свако $t \in [0, 1]$.

Као што је била ситуација са $\mathrm{Diff}_c(M)$, и простор $\mathrm{Symp}_c(M)$ је такође локално контрактибилан и свака непрекидна путања може се деформисати до глатке, чувајући крајње тачке фикснима (погледати увод у [32]). Тако да ако за неке симплектоморфизме φ_0 и φ_1 важи $[\varphi_0] = [\varphi_1]$ у $\pi_0\mathrm{Symp}_c(M)$, то је еквивалентно са чињеницом да су они симплектички изотопни.

Дефиниција 2.21. Нека је M повезана симплектичка многострукост. Група $\pi_0\mathrm{Symp}_c(M)$ компонената (путне) повезаности од $\mathrm{Symp}_c(M)$ се назива *група класа симплектичких пресликавања*[3]. Симплектоморфизам $\varphi \in \mathrm{Symp}_c(M)$ који није у компоненти путне повезаности пресликавања id називамо *егзотични симплектоморфизам.*

Напомена. Негде у литератури (на пример, [32]) се може наћи термин *есенцијални симплектоморфизам* уместо егзотични симплектоморфизам.

---

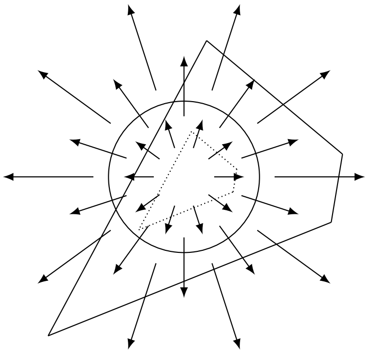
[3] На енглеском: symplectic mapping class group

За разлику од глатке категорије, о групи класа симплектичких пресликавања се јако мало зна. Чак и за неке једноставне конкретне симплектичке многострукости, попут $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{\mathrm{st}})$ из Примера 2.4, многи одговори о структури те групе нису познати. За те исте просторе смо раније дали готово потпун опис групе класа пресликавања. Главно питање којим ћемо се у наставку бавити је управо питање описивање групе $\pi_0\mathrm{Symp}_c(M)$ за одређене типове симплектичких многострукости M.

Као у случају дифеоморфизама, и овде ће одговарајуће групе за D^{2n} и $\mathbb{R}^{2n}$ бити једнаке. Међутим, исти поступак као раније неће бити применљив (иако простори $\mathrm{int}(D^{2n})$ и $\mathbb{R}^{2n}$ јесу дифеоморфни, они нису симплектоморфни).

Лема 2.22. Важи $\pi_0\mathrm{Symp}_c(D^{2n}) \cong \pi_0\mathrm{Symp}_c(\mathbb{R}^{2n})$.

Ова лема је специјалан случај Леме 3.18, која ће касније бити изложена и доказана. Идеја је доказати да је инклузија $\mathrm{Symp}_c(D^{2n}) \hookrightarrow \mathrm{Symp}_c(\mathbb{R}^{2n})$ хомотопска еквиваленција. Њен инверз је конјуговање током радијалног векторског поља (Слика 3).



Слика 3: Приказ ширења дуж радијалног векторског поља у $\mathbb{R}^{2n}$.

Нема много примера симплектичких многострукости за које је познато било шта о групи класа симплектичких пресликавања. Некад је могуће израчунати њен хомотопски тип и често резултат није велика група (као што је то Symp_c). У наставку су наведени неки познати резултати.

- Компактне оријентабилне површи.

  Лема 2.23. Нека је M компактна оријентабилна површ и ω произвољна симплектичка форма на њој. Тада је простор $\mathrm{Symp}_c(M, \omega)$ деформациони ретракт простора $\mathrm{Diff}_c^+(M)$.

  Доказ. (Пратећи [19]) Посматрајмо придруживање из $\mathrm{Diff}_c^+(M) \times [0,1]$ у $\Omega^2(M, \omega)$ дато са
  $$(\varphi, t) \mapsto \omega_t = t\varphi^*\omega + (1-t)\omega.$$
  Како је M површ и φ чува оријентацију, важи да је $\varphi^*\omega = f\omega$, за неку позитивну функцију $f : M \to \mathbb{R}$. Закључујемо да је свака од форми
  $$\omega_t = (tf + (1-t))\omega$$

недегенерисана. Како је $H^2(M;\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$, форме ω_t можемо рескалирати константом тако да су у истој кохомолошкој класи. Према Леми 2.15 следи да за свако φ постоји јединствена изотопија ψ_t тако да је $\psi_t^*\omega_t = \omega$ и $\psi_0 = \mathrm{id}$. У некој околини границе важи да је $\varphi = \mathrm{id}$, а одатле и $\omega_t = \omega$. Из конструкције ψ_t закључујемо да у истој околини важи $\psi_t = \mathrm{id}$. За $t = 1$ важи $\psi_1^*\varphi^*\omega = \omega$, па је $\varphi \circ \psi_1 \in \mathrm{Symp_c}(M, \omega)$. Придруживање $(\varphi, t) \mapsto \varphi \circ \psi_t$ је деформациони ретракт. □

Из леме следи да је хомотопски тип $\mathrm{Symp_c}(M, \omega)$ исти као $\mathrm{Diff}_c^+(M)$, па се изучавање топологије једне може свести на другу. Специјално, из Теореме 1.27 и Леме 2.22 примењене на диск D^2 следи да је простор $\mathrm{Symp_c}(\mathbb{R}^2)$ (са произвољном симплектичком формом) контрактибилан.

- Еуклидски простор $(\mathbb{R}^4, \omega_{\mathrm{st}})$.

  Слично као у димензији два, и група $\mathrm{Symp_c}(\mathbb{R}^4)$ је контрактибилна. Међутим, за разлику од дводимензионог случаја који је био познат од раније, четвородимензиони је морао да сачека другу половину двадесетог века. Овај резултат је дао Громов у свом раду [13] из 1985. године, који се сматра зачетком модерне симплектичке топологије. За прегледну формулацију и доказ ове чињенице може се погледати [20, Теорема 9.5.2] и [1, Теорема 1.9 и Напомена 1.10].

  Видимо да за разлику од глатке категорије, где није познато ни да ли је група $\mathrm{Diff}_c^+(\mathbb{R}^4)$ повезана, у симплектичкој категорији је хомотопски тип групе $\mathrm{Symp_c}(\mathbb{R}^4)$ тривијалан и тиме је група тополошки потпуно описана. Разлог за ову драстичну разлику је недостатак алата у четвородимензионој диференцијалној топологији, док је симплектичка топологија опремљена јаким алатима под колективним именом *псеудохоломорфне криве*, које је управо Громов увео.

- Производ сфера $S^2 \times S^2$.

  Громов [13, Одељак 0.3.C.] је посматрао производ $S^2 \times S^2$ са симплектичком формом $\omega = \pi_1^*\omega_0 + \pi_2^*\omega_0$, где је ω_0 симплектичка форма на сфери S^2. Група $\mathrm{Symp_c}(S^2 \times S^2, \omega)$ је хомотопски еквивалентна полудиректном производу група $\big(SO(3) \times SO(3)\big) \rtimes_\rho \mathbb{Z}_2$, где је ρ дејство групе $\mathbb{Z}_2$ на скупу $SO(3) \times SO(3)$ задато заменом фактора на $SO(3) \times SO(3)$. Стога је

  $$\pi_0 \mathrm{Symp_c}(S^2 \times S^2, \omega) \cong \mathbb{Z}_2,$$

  а егзотични симплектоморфизми су у класи $[\rho(1, \cdot)]$.

- Комплексни пројективни простор $\mathbb{C}P^2$.

  Истим техникама се Громов [13, Одељак 0.3.C.] и овде послужио као у случају $S^2 \times S^2$. Резултат је да је група симплектоморфизама простора $(\mathbb{C}P^2, \omega_{\mathrm{FS}})$ из Примера 2.7 хомотопски еквивалентна групи $PU(3)$. Следи да је група класа симплектичких пресликавања простора $\mathbb{C}P^2$ тривијална и стога $\mathbb{C}P^2$ не допушта егзотичне симплектоморфизме.

Вредно је напомене да задавање топологије на простору $\mathrm{Symp_c}$ може квалитативно утицати на изнете резултате. На пример, позната је чињеница [21] да је група $\mathrm{Symp_c}(\mathbb{R}^{2n})$ контрактибилна у C^0 топологији, за свако $n \in \mathbb{N}$. То се (још увек) не зна у случају C^∞ топологије. Штавише, за $n > 2$ се о групама $\mathrm{Symp_c}(\mathbb{R}^{2n})$ ништа не зна.

Још један отворени проблем је да ли се неки егзотични дифеоморфизам од $\mathbb{R}^{2n}$ може видети као симплектоморфизам од $\mathbb{R}^{2n}$. Међутим, ако се одрекнемо стандардне симплектичке форме на $\mathbb{R}^{2n}$ ситуација се мења. Потврдан одговор на то питање за скоро све $n \in \mathbb{N}$ дат је у [6], а главни резултат сумиран је следећом теоремом.

Теорема 2.24. Нека је $\theta \in \pi_0\mathrm{Diff}_\mathrm{c}^+(\mathbb{R}^{4k}) \cong \Theta_{4k+1}$ класа Керверове сфере Σ^{4k+1}. Тада постоји нестандардна симплектичка структура $\omega_\mathrm{ot} \in \Omega^2(\mathbb{R}^{4k})$ и симплектоморфизам $\varphi \in \mathrm{Symp_c}(\mathbb{R}^{4k}, \omega_\mathrm{ot})$ тако да је $[\varphi] = \theta \in \pi_0\mathrm{Diff}_\mathrm{c}^+(\mathbb{R}^{4k})$.

Другим речима, заборавно пресликавање (видети Одељак 3)

$$\iota : \pi_0\mathrm{Symp_c}(\mathbb{R}^{4k}, \omega_\mathrm{ot}) \to \pi_0\mathrm{Diff}_\mathrm{c}^+(\mathbb{R}^{4k})$$

има нетривијалну слику за $k \notin \{1, 3, 7, 15, 31\}$, док у осталим случајевима важи да је Керверова сфера дифеоморфна стандардној. Керверова сфера у димензији $4k + 1$ се може видети као пресек

$$\Sigma^{4k+1} = \{z_1^3 + z_2^2 + \ldots + z_{2k+2}^2 = 0\} \cap \{|z_1|^2 + \ldots + |z_{2k+2}|^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^{2k+2},$$

у смислу Брискорновог варијетета из (6). Поменута нестандардна симплектичка структура ω_ot је симплектизација заврнуте[4] контактне форме α_ot, тј. $\omega_\mathrm{ot} = \mathrm{d}(e^t\alpha_\mathrm{ot})$, где је t додатна $\mathbb{R}$ координата на симплектизацији. За дефиницију заврнуте контактне форме у произвољној димензији погледати [4, Дефиниција 3.5.]. У димензији 3 је дефиниција интуитивнија и може се погледати у [12, Дефиниција 4.5.1].

---

[4] На енглеском: overtwisted

3 Денова увртања

За симплектичку многострукост (M, ω) уочимо пресликавање

$$i : \mathrm{Symp_c}(M, \omega) \hookrightarrow \mathrm{Diff}_c^+(M)$$

које заборавља структуру. Посматрамо индуковано пресликавање

$$\iota = i_* : \pi_0 \mathrm{Symp_c}(M, \omega) \hookrightarrow \pi_0 \mathrm{Diff}_c^+(M)$$

на нивоу нулте хомотопске групе. И оно је инклузија у смислу да се класа $[f] \in \pi_0 \mathrm{Symp_c}(M, \omega)$ слика у класу $\iota([f]) = [f] \in \pi_0 \mathrm{Diff}_c^+(M)$.

Актуелно питање у симплектичкој топологији је тзв. симплектички проблем изотопије:

Да ли на датој симплектичкој многострукости (M, ω) постоје симплекоморфизми φ_0 и φ_1 који су глатко изотопни, али нису симплектички изотопни?

Питање остаје суштински исто ако се узме $\varphi_0 = \mathrm{id}$. Ово питање има јасне везе са пресликавањем ι описаним горе. Наиме,

$$\ker \iota = \{[f] \in \pi_0 \mathrm{Symp_c}(M, \omega) \mid \iota([f]) = [\mathrm{id}] \in \pi_0 \mathrm{Diff}_c^+(M)\},$$

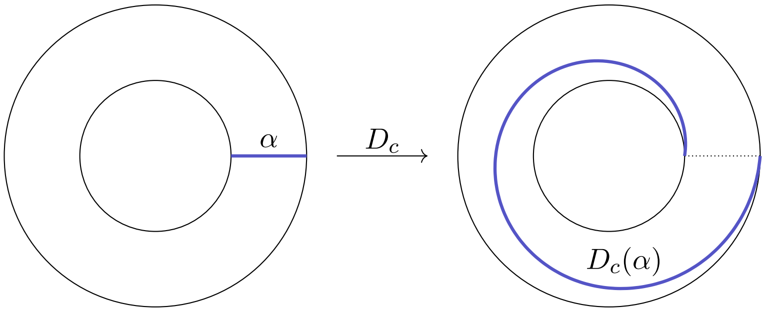
а нетривијалност овог језгра би подразумевала постојање симплектоморфизма f који је глатко изотопан идентитети, али који није симплектички изотопан идентитети. Наравно, нема очигледне гаранције да потврдан одговор за симплектички проблем изотопије постоји. Зајдел је у својој докторској тези [32] конструисао први познат потврдан одговор. Тиме је показао да су егзотични симплектоморфизми симплектички феномен и да се не могу уочити посматрајући само глатку категорију. Његова консрукција тиче се четвородимензионих многострукости са одређеним геометријским и алгебарским рестрикцијама и специјалних симплектоморфизама који спадају у већу класу пресликавања под колективним именом *Денова увртања*[5].

3.1 Денова увртања на површима

Пример 3.1. [2, Пример 1.9.] (**Стандардно Деново увртање прстена**) Посматрајмо прстен $P = S^1 \times [0, 2]$ и нека је $c = S^1 \times \{1\}$. Дефинишимо са

$$D_c\left(e^{i\theta}, t\right) = \left(e^{i(\theta + \pi t)}, t\right)$$

дифеоморфизам прстена (видети Слику 4). Пошто је $D_c|_{\partial P} = \mathrm{id}$ и D_c чува оријентацију, закључујемо да је $D_c \in \mathrm{Diff}_c^+(P)$. Пресликавање D_c зовемо Деновим увртањем прстена дуж криве c. Напоменимо да је могуће дефинисати и Деново увртање које тачке прстена ротира у супротну страну. Оно се некад назива негативним, насупрот овом описаном које се често назива позитивним. Мислићемо увек на позитивна Денова увртања, изостављајући тај епитет.



Слика 4: Стандардно Деново увртање прстена.

Испоставља се да Деново увртање прстена има везе са групом класа пресликавања прстена.

Лема 3.2. [2, Пропозиција 1.10.] Нека је $P = S^1 \times [0,2]$. Постоји изоморфизам

$$\pi_0 \mathrm{Diff}_c^+(P) \cong H_1(P, \partial P) \cong \mathbb{Z}$$

који је дат са $[h] \mapsto [h(\alpha)]$, где је α скуп $\alpha = \{1\} \times [0,2] \subset S^1 \times [0,2]$.

Пример 3.1, иако делује наивно, кључан је и посредује у дефиницији Деновог увртања за произвољну површ. За просту затворену криву γ на површи, постоји њена околина $\mathcal{N}(\gamma)$ која је дифеоморфна прстену P, а таква да се крива c слика на криву γ. То следи из теореме о цевастој околини, на пример [40, Теорема 18.]. У ту сврху, прстен P можемо замислити као цилиндар који улажемо на површ.

Дефиниција 3.3. Нека је Σ компактна површ и $\gamma \subset \mathrm{int}(\Sigma)$ проста затворена крива. Деново увртање дуж γ је дифеоморфизам $D_\gamma : \Sigma \to \Sigma$ дефинисан на следећи начин. За P, c и D_c као у Примеру 3.1, нека је

$$i : (P, c) \hookrightarrow (\mathcal{N}(\gamma), \gamma) \subset \Sigma$$

улагање које чува оријентацију околине $\mathcal{N}(\gamma)$ од γ тако да је $i(c) = \gamma$.

Дефинишемо *Деново увртање дуж* γ на површи Σ са

$$D_\gamma(x) = \begin{cases} i \circ D_c \circ i^{-1}(x), & x \in \mathcal{N}(\gamma), \\ x, & x \notin \mathcal{N}(\gamma). \end{cases}$$

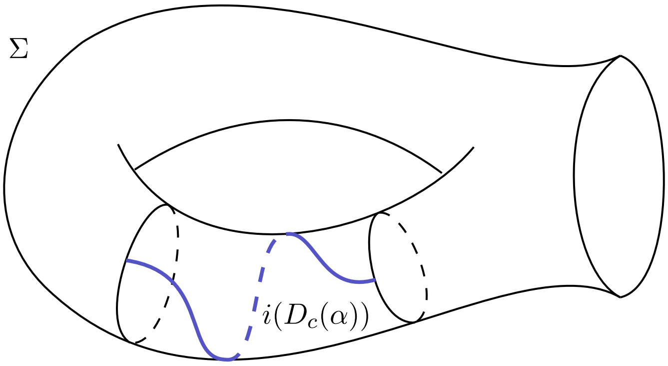
Фундаменталан резултат који се тиче Денових увртања укључује групу класа пресликавања. То је сумирано следећом теоремом Дена и Ликориша.

Теорема 3.4. [2] Група класа пресликавања $\pi_0 \mathrm{Diff}_c^+(\Sigma)$ компактне оријентабилне површи Σ је генерисана Деновим увртањима.

Они су доказали и више – да је група класа пресликавања у овом случају коначно генерисана. Ако је Σ рода g чија граница $\partial\Sigma$ има r компоненти повезаности, онда је група $\pi_0 \mathrm{Diff}_c^+(\Sigma)$ реда највише $3g + r$.

---

[5] На енглеском: Dehn twists



Слика 5: Деново увртање на површи из Дефиниције 3.3.

3.2 Уопштена Денова увртања

Стандардно Деново увртање смо дефинисали у димензији два и оно ће нам послужити као мотивација и добра визуализација за дешавање у вишим димензијама. Уопштена Денова увртања се односе на више димензије. Конструкцију ћемо спровести у димензији четири, са напоменом да је за више димензије аналогна. Као и раније, почећемо од локалног модела.

Уз помоћ уопштених Денових увртања, Зајдел је у својој докторској тези [32] решио симплектички проблем изотопије за широку класу четвородимензионих симплектичких многострукости. Вредно је напомене да је ово историјски први позитиван одговор на овај проблем. Ова пресликавања се данас често зову Ден-Зајделова увртања.

Нека је T^*S^2 котангентно раслојење од S^2 и ω_{can} његова канонска симплектичка форма из Примера 2.5. У координатном запису је

$$T^*S^2 = \{(u,v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid \|u\| = 1 \text{ и } \langle u, v\rangle = 0\}.$$

Нулто сечење је сфера

$$S^2 = \{(u,v) \in T^*S^2 \mid v = 0\},$$

и она је Лагранжева подмногострукост од T^*S^2. Форма је у локалним координатама задата са $\omega_{\mathrm{can}} = \sum_j \mathrm{d}u_j \wedge \mathrm{d}v_j$. За $\varepsilon > 0$ означимо диск раслојење

$$T^*_\varepsilon S^2 = \{(u,v) \in T^*S^2 \mid \|v\| < \varepsilon\}.$$

Посматрајмо Хамилтонову функцију $\mu(u,v) = \|v\|$ на $T^*S^2 \setminus S^2$. Позната је чињеница да $\frac{1}{2}\mu^2$ даје геодезијски ток на Римановој многострукости [12, Теорема 1.5.2]. Одатле се може закључити да ток од μ сваки ковектор транспортује дуж геодезијске од S^2 која почиње из њега са јединичном брзином. Пошто су све геодезијске на S^2 затворене и са периодом 2π, Хамилтонијан μ задаје дејство круга $S^1 \approx \mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$. У нашим координатама, дејство $\sigma : S^1 \times T^*S^2 \setminus S^2 \to T^*S^2 \setminus S^2$ се може експлицитно изразити са

$$\sigma(e^{it})(u,v) = \left(u\cos t + \frac{v}{\|v\|}\sin t, v\cos t - u\,\|v\|\sin t \right).$$

Пресликавање $\sigma(-1)(u, v) = (-u, -v)$ може да се продужи на цело T^*S^2 и то антиподално пресликавање обележавамо са A.

Нека је ток који потиче од Хамилтонијана μ једнак $\phi_t^\mu(x) = \sigma(e^{it})(x)$. Тада за глатку функцију $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ важи да је ток који потиче од Хамилтонијана $r(\mu)$ једнак

$$\phi_t^{r(\mu)}(x) = \sigma\left(e^{itr'(\mu(x))}\right)(x).$$

Лема 3.5. [32, Лема 2.1.] Нека је $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ глатка функција за коју важи

$$r(t) = 0 \text{ за } t \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } r(-t) = r(t) - t \text{ за све } t. \tag{11}$$

(а) Пресликавање $\tau : T^*S^2 \to T^*S^2$ дато са

$$\tau(x) = \begin{cases} \phi_{2\pi}^{r(\mu)}(x), & x \notin S^2, \\ A(x), & x \in S^2 \end{cases} \tag{12}$$

је симплектоморфизам из $\mathrm{Symp_c}(T^*_\varepsilon S^2, \omega_{\mathrm{can}})$.

(б) Симплектоморфизми добијени различитим одабиром r су у истој класи у $\pi_0\mathrm{Symp_c}(T^*_\varepsilon S^2, \omega_{\mathrm{can}})$.

Доказ. (а) Дефинишимо $R(t) = r(t) - t/2$. Из другог услова у (11) видимо да је R парна и важи $R'(0) = 0$. Из тога закључујемо да је функција $R(\mu(u, v)) = R(\|v\|)$ глатка на целом T^*S^2 и да је свака тачка са S^2 критична. Следи да се ток Хамилтонијана $R(\mu)$ може проширити на цело T^*S^2 тако да тачке нултог сечења оставља фиксне. Рачунамо овај ток после времена 2π:

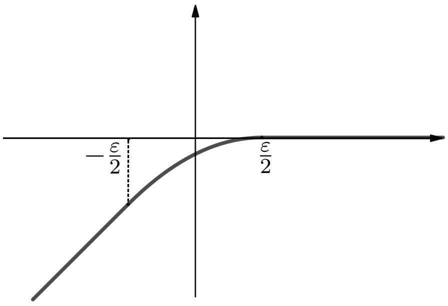
$$\begin{aligned}\phi_{2\pi}^{R(\mu)} &= \sigma\left(e^{2i\pi R'(\mu(x))}\right)(x) = \sigma\left(e^{2i\pi r'(\mu(x))}e^{-i\pi}\right)(x) \\ &= \sigma\left(e^{2i\pi r'(\mu(x))}\right)\left(\sigma(e^{-i\pi})(x)\right) = \tau \circ A(x) = A \circ \tau(x).\end{aligned}$$

Како је $\phi_{2\pi}^{R(\mu)}$ симплектоморфизам (Лема 2.14), следи да то мора бити и τ. По првом услову у (11) следи да за $(u, v) \notin T^*_{\varepsilon/2}S^2$ имамо $r'(\|v\|) = 0$ (видети Слику 6), па одатле и $\tau(x) = \sigma(1)(x) = x$. Следи да је симплектоморфизам компактно садржан у $T^*_\varepsilon S^2$.

(б) Нека су r_1 и r_2 две функције које задовољавају (11), а τ_1 и τ_2 одговарајући симплектоморфизми дефинисани као у (12). Посматрајмо разлику $\rho = r_1 - r_2$. Услови у (11) дају да је ρ парна функција и да је $\mathrm{supp}(\rho(\mu)) \subset T^*_\varepsilon S^2$. Хамилтонов ток за Хамилтонијан $\rho(\mu)$ је

$$\phi_t^{\rho(\mu)}(x) = \sigma\left(e^{itr_1'(\mu(x))}\right) \circ \sigma\left(e^{-itr_2'(\mu(x))}\right)(x) = \phi_t^{r_1(\mu)} \circ \phi_{-t}^{r_2(\mu)}(x)$$

и он дефинише изотопију између id и $\tau_1 \circ \tau_2^{-1}$ унутар $\mathrm{Symp_c}(T^*_\varepsilon S^2, \omega_{\mathrm{can}})$. □



Слика 6: Пример функције r која задовољава услове Леме 3.5.

Ову конструкцију на локалном моделу сада можемо да уопштимо. Нека је даље (M,ω) четвородимензиона симплектичка многострукост и $L \subset M$ уложена Лагранжева сфера, тј. L је Лагранжева подмногострукост од M која је дифеоморфна сфери. Вајнстинова теорема [39] о околини Лагранжеве подмногострукости нам омогућује да ситуацију пренесемо на општи случај.

Теорема 3.6. [32, Лема 2.2.]

(а) Постоји $\varepsilon > 0$ и улагање $i : T^*_\varepsilon S^2 \to M$ тако да је $i(S^2) = L$.

(б) Нека су i_1, i_2 два улагања као у делу (а) и претпоставимо да је класа $[(i_1^{-1} \circ i_2)|_{S^2}]$ тривијална у $\pi_0 \mathrm{Diff}^+_c(S^2)$. Онда постоји $\delta < \varepsilon$ тако да се $i_1|_{T^*_\delta S^2}$ може деформисати до $i_2|_{T^*_\delta S^2}$ унутар простора Лагранжевих улагања која сликају S^2 у L.

Теорема 3.7. [32, Пропозиција 2.3.] Нека је $\varepsilon > 0$ и улагање i као у Теореми 3.6 и симплектоморфизам τ као у Леми 3.5. Онда је са

$$\tau_L(x) = \begin{cases} i \circ \tau \circ i^{-1}(x), & x \in \mathrm{Im}\,(i)\,, \\ \quad x, & x \notin \mathrm{Im}\,(i) \end{cases}$$

дефинисан симплектоморфизам од M који слика L у себе, али му обрће оријентацију. Његова класа симплектичке изотопије је независна од избора функције r и улагања i.

Дефиниција 3.8. Пресликавање τ_L из претходне теореме се назива *уопштено Деново увртање дуж* L[6].

Ова пресликавања су природна уопштења Денових увртања дуж просте затворене криве на површи из Одељка 3.1 и отуда и њихов назив.

Напомена. Уопштена Денова увртања се могу дефинисати и у вишим димензијама. Довољно је заменити T^*S^2 са T^*S^k у локалном моделу. Међутим, пресликавање τ^2 које ће нам бити од интереса ће бити глатко изотопно идентитети само за $k = 2$ или $k = 6$. За остале парне димензије је показано да τ^2 није ни хомотопно идентитети кроз компактно садржану хомотопију, али се

---

[6] На енглеском: generalized Dehn twist along L

узимањем неког степена τ^{2r} може наћи компактно саржана глатка изотопија до id ([34, Одељак 5]). За $k = 1$, конструкција се своди на ону већ описану за површи.

Лема 3.9. [32, Пропозиција 2.6.] Пресликавање које је квадрат уопштеног Деновог увртања $\tau_L^2 = \tau_L \circ \tau_L$ је глатко изотопно идентитети.

Зајдел ово доказује за произвољну компактну четthreeдимензиону многострукост (M, ω) која садржи Лагранжеву сферу L. Тежи део код решавања сваког симплектичког проблема изотопије је доказати да одговарајући симплектоморфизам није симплектички изотопан идентитети. За то је обично потребно конструисати неке алгебарске инваријанте. Симплектичка Флорова хомолошка теорија је добар кандидат за то, јер је, између осталог, инваријантна у односу на симплектичку изотопију. Иако се те хомолошке групе у општем случају не могу израчунати, испоставља се да је то могуће за уопштена Денова увртања. Главни резултат Зајделове тезе је налажење конкретних примера за M и L тако да пресликавање τ_L^2 није симплектички изотопно идентитети.

Теорема 3.10. [32, Теорема 1.3] Нека је (M, ω) компактна симплектичка многострукост димензије четири са $\beta_1(M) = \operatorname{rang} H_1(M) = 0$, која садржи уложену Лагранжеву сферу S^2. Претпоставимо да је (M, ω) минимална и ирационална, као и да је $\dim H_2(M; \mathbb{Z}_2) \geqslant 3$. Тада на (M, ω) постоји егзотични симплектоморфизам који је глатко изотопан идентитети.

За општију формулацију на језику алгебре погледати [32, Последица 3.6.]. Иако на овом нивоу објашњавање појмова минималне и (и)рационалне многострукости мало значи, ипак су дати ниже ради комплетности.

Дефиниција 3.11. Симплектичка 4-многострукост M је *минимална* ако не садржи симплектички уложену сферу S чији је индекс самопресека $S \cdot S = -1$, тј. такву да је

$$S \cdot S = \int_S PD(S) = -1,$$

где је са $PD(S) \in H^2_{\mathrm{dR}}(M)$ означен Поенкареов дуал од S.

Дефиниција 3.12. Дата је симплектичка 4-многострукост M. Кажемо да је она *рационална* ако се може добити применом сигма процеса[7] на $\mathbb{C}P^2$ или $S^2 \times S^2$, а *ирационална* ако није рационална.

Зајдел је имао занимљиве резултате везане за групу класа симплектичких пресликавања од T^*S^2, а у светлу пресликавања (3).

Теорема 3.13. [33, Теорема 1. и Последица 2.] Опремимо T^*S^2 стандардном симплектичком формом из Примера 2.5.

(a) Важи $\pi_0 \mathrm{Symp}_c(T^*S^2) \cong \mathbb{Z}$ и све више хомотопске групе од $\mathrm{Symp}_c(T^*S^2)$ су тривијалне.

---

[7] У енглеској литератури је чешћи термин blow-up, који нема усвојен српски превод

(б) За пресликавање $\iota : \pi_0 \mathrm{Symp_c}(T^*S^2) \to \pi_0 \mathrm{Diff}^+_{\mathrm{c}}(T^*S^2)$ важи $\mathrm{Im}\,(\iota) \cong \mathbb{Z}_2$.

Важи и више него што тврди ова теорема. Генератор групе $\mathrm{Symp_c}(T^*S^2)$ (која је из дела под (а) слабо хомотопно еквивалентна са $\mathbb{Z}$) је управо уопштено Деново увртање τ. Занимљиво је да је класа $[\tau]$ у $\pi_0 \mathrm{Diff}^+_{\mathrm{c}}(T^*S^2)$ само реда два.

3.3 Денова увртања по фибрама

Видели смо да уопштено Деново увртање посредује у решавању симплектичког проблема изотопије на одређеним четвородимензионим многострукостима. Међутим, осим рестрикције на димензију, захтевано је да те многострукости имају Лагранжеву сферу и заводовљавају одређене алгебарске услове. Овде уводимо нову класу увртања која се дефинишу за неке компактне симплектичке многострукости са границом произвољне димензије. Уклоњена је димензиона рестрикција, али се захтева нека другачија структура.

Дефиниција 3.14. *Лиувилов домен* је компактна многострукост W са формом $\lambda \in \Omega^1(W)$, која се назива *Лиувиловом формом*, таква да задовољава следеће услове:

- (i) Форма $\mathrm{d}\lambda$ је симплектичка форма на W.
- (ii) Векторско поље X_λ дуално форми λ, које се назива *Лиувиловим векторским пољем*, дефинисано са $i_{X_\lambda}\mathrm{d}\lambda = \lambda$ показује трансверзално ка споља на граници ∂W.

Као последица Стоксове теореме следи да Лиувилови домени, као тачне симплектичке многострукости, морају имати непразну границу. Иначе, у случају $\partial W = \emptyset$ би важила контрадикција

$$0 \neq \int\limits_W \omega^n = \int\limits_W \mathrm{d}\left(\lambda \wedge \omega^{n-1}\right) = \int\limits_{\partial W} \lambda \wedge \omega^{n-1} = 0.$$

Лема 3.15. Граница Лиувиловог домена је контактна многострукост са контактном формом $\alpha = \lambda|_{\partial W}$.

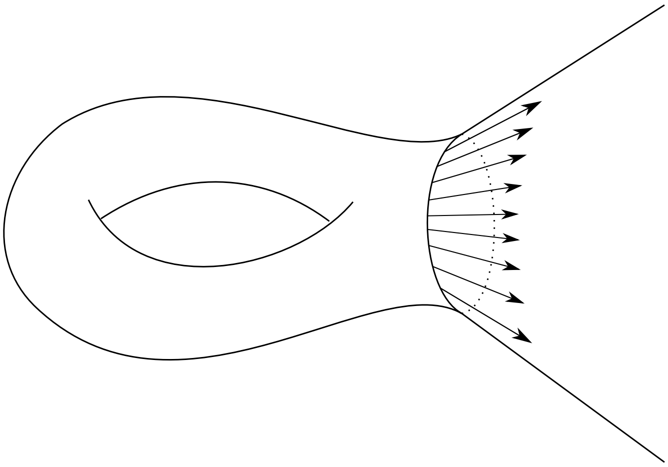
Доказ. За почетак имамо

$$\lambda \wedge (\mathrm{d}\lambda)^{n-1} = \left(i_{X_\lambda}\mathrm{d}\lambda\right) \wedge (\mathrm{d}\lambda)^{n-1} = \frac{1}{n} i_{X_\lambda} (\mathrm{d}\lambda)^n .$$

Како је $(\mathrm{d}\lambda)^n = \omega^n$ форма запремине на W и Лиувилово векторско поље X_λ трансверзално на границу, следи да је $i_{X_\lambda}(\mathrm{d}\alpha)^n = \left(i_{X_\lambda}(\mathrm{d}\lambda)^n\right)|_{\partial W}$ индукована форма запремине на ∂W. Одатле је

$$\alpha \wedge (\mathrm{d}\alpha)^{n-1} = \left(\lambda \wedge (\mathrm{d}\lambda)^{n-1}\right)\bigg|_{\partial W} = \frac{1}{n} i_{X_\lambda} (\mathrm{d}\alpha)^n \neq 0,$$

и следи да је α контактна форма на ∂W. □



Слика 7: Комплетирање Лиувиловог домена.

Претпостављаћемо ради једноставности да су сви Лиувилови домени повезане многострукости. Сваки Лиувилов домен има своју одговарајућу отворену (тј. некомпактну и без границе) многострукост. Њу можемо конструисати канонски уз помоћ Лиувиловог векторског поља, лепљењем одговарајућег дела симплектизације од ∂W (Слика 7).

Нека је φ_r ток векторског поља X_λ. За $\varepsilon > 0$ довољно мало, пресликавање

$$\phi : \partial W \times (-\varepsilon, 0] \to W, \quad (x, r) \mapsto \varphi_r(x)$$

је улагање [8, Одељак 11.1.]. Лиувилова форма λ на $\phi(\partial W \times (-\varepsilon, 0])$ одговара форми $e^r\alpha$ на $\partial W \times (-\varepsilon, 0]$. Уз $\lambda(X_\lambda) = 0$, формирамо диференцијалну једначину

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\phi^*\lambda = \phi^*\left(i_{X_\lambda}\mathrm{d}\lambda + \mathrm{d}i_{X_\lambda}\lambda\right) = \phi^*\Big(\lambda + \mathrm{d}\left(\lambda(X_\lambda)\right)\Big) = \phi^*\lambda,$$

чије је решење

$$\phi^*\lambda = e^r \left.\lambda\right|_{r=0} = e^r\alpha.$$

Продужење Лиувиловог домена дефинишемо са

$$\widehat{W} = W \cup_\phi \left(\partial W \times (-\varepsilon, \infty)\right).$$

Продужење Лиувилове форме је онда

$$\widehat{\lambda} = \begin{cases} \lambda, & \text{на } W, \\ e^r\alpha, & \text{на } \partial W \times (-\varepsilon, \infty), \end{cases}$$

а векторског поља

$$\widehat{X}_\lambda = \begin{cases} X_\lambda, & \text{на } W, \\ \frac{\partial}{\partial r}, & \text{на } \partial W \times (-\varepsilon, \infty). \end{cases}$$

Ток векторског поља $\widehat{X}_\lambda$ је на продужењу комплетан, па се $\widehat{W}$ зове и *комплетирање* домена W. Симплектичка форма на $\widehat{W}$ се добија као

$$\widehat{\omega} = \mathrm{d}\widehat{\lambda} = \begin{cases} \mathrm{d}\lambda, & \text{на } W, \\ e^r(\mathrm{d}r \wedge \alpha + \mathrm{d}\alpha), & \text{на } \partial W \times (-\varepsilon, \infty). \end{cases}$$

Пример 3.16. Дискови D^{2n} са Лиувиловом формом

$$\lambda = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(x_j \mathrm{d}y_j - y_j \mathrm{d}x_j\right).$$

Лиувилово векторско поље је радијално векторско поље

$$X_\lambda = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + y_j \frac{\partial}{\partial y_j}\right)$$

које је очигледно трансверзално на ∂D^{2n}. Симплектичка форма на D^{2n} је $\mathrm{d}\lambda = \omega_{\mathrm{st}}$. Комплетирање диска је $\widehat{D^{2n}} = \mathbb{R}^{2n}$.

Пример 3.17. Други битан пример се тиче котангентног раслојења са канонском формом, из Примера 2.5. Диск котангентно раслојење

$$D^*M = \{(q,p) \in T^*M \mid \|p\| \leqslant 1\} \subset T^*M$$

посматрамо као симплектичку многострукост која је опремљена рестрикцијом форме ω_{can} са T^*M. Лиувилова форма је управо $-\lambda$ из тог примера. Лиувилово векторско поље је $X_{-\lambda} = \sum_j p_j \frac{\partial}{\partial p_j}$, које је трансверзално на $\partial D^*M = S^*M$. Комплетирање од D^*M је цело котангентно раслојење T^*M.

Лема 3.18. Нека је W Лиувилов домен и $\widehat{W}$ његово комплетирање. Тада су простори $\mathrm{Symp_c}(W)$ и $\mathrm{Symp_c}(\widehat{W})$ слабо хомотопно еквивалентни.

Доказ. (Пратећи [10, Пропозиција 2.1.])

Нека је ε као у дефиницији $\widehat{W}$. За $\rho \geqslant -\varepsilon$, посматрајмо компактне скупове

$$W_\rho = \widehat{W} \setminus \left(\partial W \times (\rho, \infty)\right).$$

Приметимо да је $W_0 = W$. За $-\varepsilon \leqslant r < R$, дефинишимо пресликавање

$$L_{R-r} : \mathrm{Symp_c}(W_R) \to \mathrm{Symp_c}(W_r), \quad \psi \mapsto \varphi_{r-R} \circ \psi \circ \varphi_{R-r},$$

где је φ_t Лиувилов ток. Инклузија $i_{r,R} : W_r \hookrightarrow W_R$ индукује инклузију

$$i^S_{r,R} : \mathrm{Symp_c}(W_r) \hookrightarrow \mathrm{Symp_c}(W_R).$$

Пресликавање L_{R-r} је хомотопски инверз за $i^S_{r,R}$. Хомотопија

$$i^S_{r,R} \circ L_{R-r} \simeq \mathrm{id}_{\mathrm{Symp_c}(W_R)}$$

је дата са $i^S_{R-t(R-r),R} \circ L_{t(R-r)}$, а слично је и за другу страну.

Циљ је показати да је инклузија

$$\iota : \mathrm{Symp_c}(W) \hookrightarrow \mathrm{Symp_c}(\widehat{W})$$

слаба хомотопска еквиваленција. Другим речима, потребно је показати да су хомоморфизми

$$\iota_* : \pi_n \mathrm{Symp_c}(W) \to \pi_n \mathrm{Symp_c}(\widehat{W})$$

заправо изоморфизми. Фиксирајмо $n \in \mathbb{N}$.

Прво доказујемо сурјективност. Посматрајмо произвољно пресликавање $f : S^n \to \mathrm{Symp}_c(\widehat{W})$. Како је сфера S^n компактна, према [10, Лема 2.4.] следи да $\mathrm{Im}\,(f)$ припада $\mathrm{Symp}_c(W_K)$, за неко $K > 0$. Из претходног разматрања следи да је

$$i^S_{0,K} : \mathrm{Symp}_c(W) \to \mathrm{Symp}_c(W_K)$$

хомотопска еквиваленција, што доказује сурјективност.

За инјективност посматрамо два пресликавања $f_1, f_2 : S^n \to \mathrm{Symp}_c(W)$ која су хомотопна кроз пресликавања из $\mathrm{Symp}_c(\widehat{W})$, односно таква да је испуњено $\iota_*(f_1) = \iota_*(f_2)$. Хомотопија H између њих је пресликавање са доменом $S^n \times [0, 1]$, који је компактан, па према [10, Лема 2.4.] следи да слика $\mathrm{Im}\,(H)$ припада $\mathrm{Symp}_c(W_K)$, за неко $K > 0$. Исто као код сурјективности, пресликавање $i^S_{0,K}$ је хомотопска еквиваленција између $\mathrm{Symp}_c(W)$ и $\mathrm{Symp}_c(W_K)$. Следи да је H хомотопно хомотопији $f_1 \simeq f_2$ унутар $\mathrm{Symp}_c(W)$, што доказује и инјективност.

□

Дефиниција 3.19. Нека је (W, λ) Лиувилов домен такав да је Рибов ток σ_t од $\lambda|_{\partial W}$ на граници 1-периодичан. Нека је $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ глатка функција таква да је

$$v(t) = 0 \text{ за } t < 0, \qquad v(t) = -1 \text{ за } t > 0,95.$$

Тада је са

$$\tau(p) = \begin{cases} \Big(\sigma_{v(r)}(x), r\Big), & \text{за } p = (x, r) \in \partial W \times (0, \infty) \subset \widehat{W}, \\ \quad p, & \text{иначе,} \end{cases}$$

дефинисано (позитивно) *Деново увртање по фибрама*[8].

Слично као у Леми 3.5, τ је елемент $\mathrm{Symp}_c(W, \mathrm{d}\lambda)$ и његова класа изотопије у $\pi_0\mathrm{Symp}_c(W, \mathrm{d}\lambda)$ не зависи од избора функције v. Денова увртања по фибрама су у следећем смислу надскуп уопштених Денових увртања за Лиувилов домен D^*S^n.

Лема 3.20. [38, Напомена 3.10.] Квадрат уопштеног Деновог увртања $\tau^2_{S^n}$ дуж сфере $S^n \subset T^*S^n$ је симплектички изотопан Деновом увртању по фибрама на D^*S^n, за $n \in \mathbb{N}$.

Да бисмо изложили главне резултате који се тичу групе класа симплектичких пресликавања Лиувиловог домена, потребно је да опишемо Флорову теорију коју је Уљаревић конструисао у својој докторској тези [37]. Овде ће бити дат кратак преглед, без улажења у детаље конструкције.

Флорове хомолошке групе HF дефинишу се за Лиувилов домен (W, λ) са повезаном границом ∂W и комплетирањем $\widehat{W}$. Увек ће се подразумевати коефицијенти $\mathbb{Z}_2$ код Флорових хомолошких група. Термин *близу бесконачности* ће означавати скуп $\partial W \times (r_0, \infty) \subset \widehat{W}$, за довољно велико $r_0 > 0$.

---

[8] На енглеском: fibered Dehn twist

Кажемо да је ϕ *тачан симплектоморфизам* ако је

$$\phi^*\lambda - \lambda = \mathrm{d}F_\phi \tag{13}$$

тачна форма. Означимо са $\mathrm{Symp_c}(W, \lambda/\mathrm{d})$ скуп свих тачних симплектоморфизама од W који имају компактан носач у $\mathrm{int}(W)$.

Узмимо $\phi \in \mathrm{Symp_c}(W, \lambda/\mathrm{d})$ и изаберимо F_ϕ из (13) тако да је $F_\phi|_{\partial W} = 0$. Нека је број $a \in \mathbb{R}$ такав да није период ниједне Рибове орбите на граници $(\partial W, \lambda|_{\partial W})$. Такве бројеве ћемо звати *допустиви.* Нека је $H_t : \widehat{W} \to \mathbb{R}$ фамилија Хамилтонијана који су уврнути са ϕ, тј. за које важи $H_{t+1} = H_t \circ \phi$ и такви да су линеарни са нагибом a близу бесконачности, тј. $H_t(x, r) = ar$. Ово нам је за сада довољно за даље излагање, а за потпуну дефиницију почетних података погледати [37, Дефиниције 2.2.3. и 2.2.5.].

Ланчасти комплекс се гради на *простору уврнутих петљи*

$$\Omega_\phi = \{\gamma : \mathbb{R} \to \widehat{W} \mid \phi(\gamma(t+1)) = \gamma(t)\},$$

за фиксирану класу $\theta \in \pi_0(\Omega_\phi)$.

Хамилтонијани који имају исти нагиб, без обзира на вредности на компактном делу $\widehat{W}$, даће исте хомолошке групе [37, Последица 2.7.4.]. Дакле, хомолошке групе зависе од ϕ, a, θ и означаваћемо их $HF_*(\phi, a, \theta)$ подразумевајући многострукост на којој радимо као фиксну. Дефинишемо

$$HF_*(\phi, a) = \bigoplus_{\theta \in \pi_0(\Omega_\phi)} HF_*(\phi, a, \theta).$$

Пошто се Флорова хомологија за мале Хамилтонијане своди на Морсову, онда за $\varepsilon > 0$ довољно мало важи

$$HF_*(\mathrm{id}, \varepsilon) \cong H_{*+n}(W, \partial W; \mathbb{Z}_2) \ \text{ и } \ HF_*(\mathrm{id}, -\varepsilon) \cong H_{*+n}(W; \mathbb{Z}_2). \tag{14}$$

Такође, важи

$$HF_*(\mathrm{id}, \varepsilon, \theta) = 0, \ \text{за } |\varepsilon| \text{ мало и нетривијалну класу } \theta \in \pi_0(\Omega_\phi), \tag{15}$$

видети [37, Пример 2.7.7.].

Сада ћемо описати како се мењају хомолошке групе при промени параметара ϕ и a. Претпоставимо да су реални бројеви a_1 и a_2 такви да су сви бројеви интервала $[a_1, a_2]$ допустиви. Тада важи $HF_*(\phi, a_1) \cong HF_*(\phi, a_2)$ [37, Пропозиција 3.2.1.]. Другим речима, нагиб Хамилтонијана можемо мењати без утицаја на хомолошке групе, све док не пролазимо преко неког броја који је период Рибове орбите на граници.

Нека су ϕ_1 и ϕ_2 два тачна симплектоморфизма из $\mathrm{Symp_c}(W, \lambda/\mathrm{d})$ која су изотопна кроз компактно садржане тачне симплектоморфизме. Тада важи

$$HF_*(\phi_1, a) \cong HF_*(\phi_2, a), \tag{16}$$

за све допустиве a. Групе $\mathrm{Symp_c}(W, \lambda/\mathrm{d})$ и $\mathrm{Symp_c}(W, \mathrm{d}\lambda)$ су хомотопски еквивалентне [37, Лема 5.1.2.], па изоморфизам (16) важи и када је $[\phi_1] = [\phi_2]$ у $\mathrm{Symp_c}(W, \mathrm{d}\lambda)$.

Теорема 3.21. [38, Теорема 1.1.] Нека је (W, λ) Лиувилов домен са повезаном границом такав да Рибов ток форме $\lambda|_{\partial W}$ има период један. Нека је $a \in \mathbb{R}$ број који није период Рибовог тока. Ако је Деново увртање по фибрама представник класе реда $l \in \mathbb{N}$ у $\pi_0 \mathrm{Symp}_c(W, \mathrm{d}\lambda)$, онда је

$$HF(\mathrm{id}, a) \cong HF(\mathrm{id}, a + l).$$

Скица доказа. Означимо Деново увртање по фибрама са τ и нека је функција v као у Дефиницији 3.19. Постоји јединствена функција $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ које је примитивна за v и једнака 0 у близини 0. По [38, Напомена 3.2.], Деново увртање по фибрама је ток после времена 1 од Хамилтонијана $K : \widehat{W} \to \mathbb{R}$ датог са

$$K(x, r) = \begin{cases} -V(r), & \text{за } (x, r) \in \partial W \times (0, \infty), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Близу бесконачности је

$$K(x, r) = r - \int\limits_0^1 v(t)\, \mathrm{d}t - 1.$$

Следи да је τ^l ток после времена 1 од Хамилтонијана $K_l : \widehat{W} \to \mathbb{R}$ који је једнак lr близу бесконачности. Онда из (16) и природности Флорове хомологије која је придружена Хамилтонијану K [37, Пропозиција 3.3.4.] следи низ изоморфизама:

$$HF(\mathrm{id}, a) \cong HF(\tau^l, a) \cong HF(\mathrm{id}, a + l).$$

□

Теорема 3.22. [38, Последица 1.4.] Нека је (W, λ) Лиувилов домен димензије $2n$ са повезаном границом такав да Рибов ток форме $\lambda|_{\partial W}$ индукује слободно дејство круга на ∂W и има период један. Ако је $c_1(W) = 0$ и хомологија $H_*(W; \mathbb{Z}_2)$ није симетрична, онда је Деново увртање по фибрама егзотични симплектоморфизам од $(W, \mathrm{d}\lambda)$.

Са $c_1(W)$ је означена прва Чернова класа многострукости W. Овде, симетричност хомологије $H_*(W; \mathbb{Z}_2)$ подразумева постојање $k \in \mathbb{Z}$ тако да је $H_{k-j}(W; \mathbb{Z}_2) \cong H_j(W; \mathbb{Z}_2)$, за све $j \in \mathbb{Z}$. Неки примери симетричних ланаца би били $\ldots \to 0 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2 \to 0 \to \ldots$ или $\ldots \to 0 \to \mathbb{Z}_2^2 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2^2 \to 0 \to \ldots$ Симетричност хомологије је чисто алгебарски услов. Уљаревић је заправо доказао општију верзију ове теореме која не захтева да је $c_1(W) = 0$, али се онда услов о симетричности хомологије мора модификовати да укључује одређену периодичност. То је сумирано у [38, Последица 3.6.].

Доказ. Нека је $0 < \varepsilon < 1$. Претпоставимо супротно – Деново увртање по фибрама је симплектички изотопно идентитети. Тада по Теореми 3.21, имамо изоморфизам

$$HF(\mathrm{id}, -\varepsilon) \cong HF(\mathrm{id}, 1 - \varepsilon),$$

који не чува градацију. Он, међутим, чува релативну градацију и стога постоји $c \in \mathbb{Z}$ тако да је

$$HF_*(\mathrm{id}, -\varepsilon) \cong HF_{*+c}(\mathrm{id}, 1-\varepsilon). \tag{17}$$

Заправо, поменути изоморфизам не чува ни класу из $\pi_0(\Omega_{\mathrm{id}})$, али се из (15) може закључити да она мора остати тривијална. Пошто ниједан број из скупа $(-1,0) \cup (0,1)$ није период Рибовог тока, а важи $-\varepsilon \in (-1,0), 1-\varepsilon \in (0,1)$, следи да се ε може произвољно смањити ка 0 или повећати ка 1 без утицаја на групе HF_*. Стога је по (14):

$$HF_*(\mathrm{id}, -\varepsilon) \cong H_{*+n}(W; \mathbb{Z}_2) \ \text{ и } \ HF_*(\mathrm{id}, 1-\varepsilon) \cong H_{*+n}(W, \partial W; \mathbb{Z}_2). \tag{18}$$

Из (17) и (18) је

$$H_*(W; \mathbb{Z}_2) \cong H_{*+c}(W, \partial W; \mathbb{Z}_2). \tag{19}$$

Овиме је ситуација сведена на сингуларну хомологију, што је алатка алгебарске топологије. Остатак доказа је игра индексима.

Из Поенкареове дуалности [14, Теорема 3.43.] важи

$$H_*(W, \partial W; \mathbb{Z}_2) \cong H^{2n-*}(W; \mathbb{Z}_2). \tag{20}$$

Коефицијенти су из поља $\mathbb{Z}_2$, па по [14, страна 198] важи

$$H^{2n-*}(W; \mathbb{Z}_2) \cong \mathrm{Hom}(H_{2n-*}(W; \mathbb{Z}_2), \mathbb{Z}_2) \cong H_{2n-*}(W; \mathbb{Z}_2). \tag{21}$$

Комбинујући (19), (20) и (21) добијамо да је хомологија симетрична:

$$H_*(W; \mathbb{Z}_2) \cong H_{*+c}(W, \partial W; \mathbb{Z}_2) \cong H^{2n-c-*}(W; \mathbb{Z}_2) \cong H_{2n-c-*}(W; \mathbb{Z}_2),$$

што је контрадикција. Тиме је доказ завршен. $\square$

Литература

[1] Abreu, Miguel. 1997. Topology of symplectomorphism groups of $S^2 \times S^2$. *Inventiones mathematicae*, **131**(1), 1–23.

[2] Au, Thomas Kwok-Keung, Luo, Feng, & Yang, Tian. 2011. Lectures on the mapping class group of a surface. *Pages 21–61 of: Transformation groups and moduli spaces of curves.* Adv. Lect. Math. (ALM), vol. 16. Int. Press, Somerville, MA.

[3] Banyaga, Augustin, & Hurtubise, David. 2004. *Lectures on Morse homology.* Kluwer Texts in the Mathematical Sciences, vol. 29. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht.

[4] Borman, Matthew Strom, Eliashberg, Yakov, & Murphy, Emmy. 2015. Existence and classification of overtwisted contact structures in all dimensions. *Acta Math.*, **215**(2), 281–361.

[5] Brieskorn, Egbert. 1966. Beispiele zur Differentialtopologie von Singularitäten. *Invent. Math.*, **2**, 1–14.

[6] Casals, Roger, Keating, Ailsa, Smith, Ivan, & Courte, Sylvain. 2018. Symplectomorphisms of exotic discs. *Journal de l'École polytechnique - Mathématiques*, **5**, 289–316.

[7] Cerf, Jean. 1970. La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et le théorème de la pseudo-isotopie. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, **39**, 5–173.

[8] Cieliebak, Kai, & Eliashberg, Yakov. 2012. *From Stein to Weinstein and back.* American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 59. American Mathematical Society, Providence, RI. Symplectic geometry of affine complex manifolds.

[9] Da Silva, Ana Cannas. 2008. *Lectures on symplectic geometry.* Lecture Notes in Mathematics, vol. 1764. Springer-Verlag, Berlin.

[10] Evans, Jonathan David. 2011. Symplectic mapping class groups of some Stein and rational surfaces. *J. Symplectic Geom.*, **9**(1), 45–82.

[11] Freedman, Michael Hartley, *et al.* . 1982. The topology of four-dimensional manifolds. *J. Differential Geom*, **17**(3), 357–453.

[12] Geiges, Hansjörg. 2008. *An introduction to contact topology.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 109. Cambridge University Press, Cambridge.

[13] Gromov, Mikhael. 1985. Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds. *Inventiones mathematicae*, **82**(2), 307–347.

[14] Hatcher, Allen. 2002. *Algebraic Topology.* Cambridge University Press.

[15] Hirzebruch, Friedrich. 1956. *Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie.* Vol. 9. Springer-Verlag, Berlin.

[16] Jr., James Eells, & Kuiper, Nicolaas H. 1962. An invariant for certain smooth manifolds. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **60**(93).

[17] Kervaire, Michel, & Milnor, John. 1963. Groups of Homotopy Spheres: I. *Annals of Mathematics*, **77**(3), 504–537.

[18] Kupers, Alexander. 2019. *Lectures on diffeomorphism groups of manifolds*. Доступно на http://people.math.harvard.edu/~kupers/teaching/272x/book.pdf (приступљено септембра 2020).

[19] McDuff, Dusa. 2004. A survey of the topological properties of symplectomorphism groups. *Pages 173–193 of: Topology, geometry and quantum field theory*. London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 308. Cambridge Univ. Press, Cambridge.

[20] McDuff, Dusa, & Salamon, Dietmar. 2012. *J-holomorphic curves and symplectic topology*. Second edn. American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 52. American Mathematical Society, Providence, RI.

[21] McDuff, Dusa, & Salamon, Dietmar. 2017. *Introduction to symplectic topology*. Third edn. Oxford Graduate Texts in Mathematics. Oxford University Press, Oxford.

[22] McEnroe, Rachel. 2015. *Milnor's construction of exotic 7-spheres*. Доступно на http://math.uchicago.edu/~may/REU2015/REUPapers/McEnroe.pdf (приступљено септембра 2020). Семинарски рад.

[23] Milnor, John. 1956. On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. *Annals of Mathematics*, **64**, 399–405.

[24] Milnor, John. 2011. *Spheres*. Доступно на https://www.youtube.com/watch?v=kQaUCDFvbjA (приступљено септембра 2020). Предавање.

[25] Milnor, John W., & Stasheff, James D. 1974. *Characteristic classes*. Princeton University Press, Princeton, N. J.; University of Tokyo Press, Tokyo. Annals of Mathematics Studies, No. 76.

[26] Newman, M.H.A. 1966. The engulfing theorem for topological manifolds. *Annals of Mathematics*, **84**, 555–571.

[27] Oneto, Angel. 2002. Alternative real division algebras of finite dimension. *Divulg. Mat.*, **10**(2), 161–169.

[28] Palais, Richard. 1960. Extending Diffeomorphisms. *Proceedings of The American Mathematical Society - Proc. Amer. Math. Soc.*, **11**, 274–274.

[29] Perelman, Grigori. 2002. The Entropy Formula for the Ricci Flow and Its Geometric Application. *ArXiv preprint*.

[30] Perelman, Grigori. 2003a. Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds. *ArXiv preprint*.

[31] Perelman, Grigori. 2003b. Ricci flow with surgery on three-manifolds. *ArXiv preprint*.

[32] Seidel, Paul. 1997. *Floer homology and the symplectic isotopy problem.* Ph.D. thesis, University of Oxford.

[33] Seidel, Paul. 1998. Symplectic automorphisms of T^*S^2. *ArXiv preprint.*

[34] Seidel, Paul. 2014. Exotic iterated Dehn twists. *Algebr. Geom. Topol.*, **14**(6), 3305–3324.

[35] Smale, Stephen. 1962. On the structure of manifolds. *Amer. J. Math*, 387–399.

[36] Steenrod, Norman. 1951. *The Topology of Fibre Bundles.* Princeton Mathematical Series, vol. 14. Princeton University Press, Princeton, NJ.

[37] Uljarević, Igor. 2016. *A symplectic homology theory for automorphisms of Liouville domains.* Ph.D. thesis, ETH Zurich.

[38] Uljarević, Igor. 2017. Floer homology of automorphisms of Liouville domains. *Journal of Symplectic Geometry*, **15**(3), 861–903.

[39] Weinstein, Alan. 1971. Symplectic manifolds and their lagrangian submanifolds. *Advances in Mathematics*, **6**(3), 329 – 346.

[40] Милинковић, Дарко. 2019. *Увод у рачун на многострукостима.* Доступно на http://poincare.matf.bg.ac.rs/~milinko/skripta/globalna.pdf (приступљено септембра 2020).