КОВАРИЈАНТНО ДИФЕРЕНЦИРАЊЕ

ДАРКО МИЛИНКОВИЋ

Апстракт. Теорија конексија и коваријантног диференцирања заузима једно од централних места модерне анализе, диференцијалне геометрије и теоријске физике. Циљ овог чланка је да на *„елементаран”* начин мотивише и уведе ове појмове. Под *„елементарним”* подразумевамо *„на нивоу првих курсева Анализе”*.

1. **Увод**

Нека су дате тачке $A(x_a, y_a, z_a)$ и $B(x_b, y_b, z_b)$ у тродимензионалном еуклидском простору. Из Питагорине теореме следи да је растојање између њих једнако

$$\rho(A,B) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 + (z_a - z_b)^2}. \tag{1}$$

Претпоставимо даље да се ове две тачке налазе на површи, рецимо на површини Земље. Путник који жели да стигне из тачке A у тачку B мораће да пређе растојање које је веће од вредности израчунате претходном формулом. Заиста, формула (1) даје дужину *сегмента праве* који спаја тачке A и B. Путник који се креће по површини Земље, међутим, не може да се креће по правој, јер сфера не може да садржи сегмент праве. Пошто је „сегмент праве најкраће растојање између две тачке”, следи да ће наш путник прећи пут чија је дужина већа од величине $\rho(A,B)$.

Који пут од тачке A до тачке B је *најкраћи* за путника који се креће по сфери, или, општије, по некој површи? Да ли увек постоји такав пут? Ако постоји, да ли постоји *само један*? Како га пронаћи? То су главна питања којима ћемо се бавити у овом чланку. Видећемо да су она везана за *начин на који тај путник израчунава први извод.* Први извод (векторско–вредносне) функције $\mathbf{r} : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$ је

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(\mathbf{r}(t_0 + h) - \mathbf{r}(t_0)). \tag{2}$$

Десна страна у (2) подразумева да знамо шта је сабирање вектора и множење вектора скаларом. Приметимо да је резултат сабирања вектора и њиховог множења скаларом опет вектор, дакле објекат истог типа. Дакле, ако је $\mathbf{r}$ векторско–вредносна функција, онда је то и десна, а тиме и лева, страна у (2). Међутим, шта ако је $\mathbf{r} : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to \mathbf{S}^2$ пресликавање интервала у сферу $\mathbf{S}^2$, или неку другу површ? Подсетимо се да се у дефиницији сабирања вектора користимо могућношћу да идентификујемо произвољни вектор са неким вектором чији је почетак, рецимо, у координатном почетку. Ову идентификацију вршимо помоћу *транслације*, тј. *паралелног преноса.* Како пренети ове појмове на површи?

2. **Дужина лука криве**

Нека је $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k}$ глатка[1] крива која спаја тачке A и B, тј. нека је $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ глатко пресликавање такво да је $\mathbf{r}(a) = A$, $\mathbf{r}(b) = B$. Изаберимо на тој кривој n тачака

$$A = P_1(x_1, y_1, z_1), P_1(x_2, y_2, z_2), \ldots, P_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}), P_n(x_n, y_n, z_n) = B$$

таквих да је $P_n = \mathbf{r}(t_k)$, $a = t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$. Нека је $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$; слично се дефинишу Δy_k и Δz_k. Дужина изломљене линије $P_1P_2\cdots P_{n-1}P_n$ је $\hat{L}(\mathbf{r}; n; \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) = \sum_{k=1}^n \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2 + (\Delta z_k)^2}$. Нека је подела изабрана тако да је $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ за свако k . Тада је дужина криве $\mathbf{r}(t)$ (по дефиницији, а у складу са геометријском интуицијом) $L(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta t \to 0} \hat{L}(\mathbf{r}; n; \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$, тј. [2]

$$L(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{\Delta x_k}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z_k}{\Delta t}\right)^2}\, \Delta t.$$

Применом Кошијеве теореме о средњој вредности лако се види да је

$$L(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\dot{x}(\xi_k)^2 + \dot{y}(\xi_k)^2 + \dot{z}(\xi_k)^2}\Delta t, \qquad \text{за неке } \xi_k \in (t_k, t_{k+1}),$$

где тачкица изнад слова означава диференцирање по t. Последњи израз је лимес интегралне суме функције $t \mapsto \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$. Приметимо да је ова функција еуклидска норма $\|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\|$ тангентног вектора $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{x}\,\mathbf{i} + \dot{y}\,\mathbf{j} + \dot{z}\,\mathbf{k}$ на криву $t \mapsto \mathbf{r}(t)$. Тако добијамо израз за дужину криве

$$L(\mathbf{r}) = \int_a^b \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| dt. \tag{3}$$

Сада можемо да дамо следећу дефиницију.

Дефиниција 1. Нека су A и B две тачке на површи $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$. *Растојањем између A и B* називамо величину $d(A, B) = \inf_{\mathbf{r}} L(\mathbf{r})$, где је инфимум узет по свим глатким кривим на Σ које спајају A и B. $\Diamond$

Напомена 1. Из (3) видимо да нам је за дефиницију дужине криве, а тиме и растојања, на површи Σ довољна норма на тангентној равни $T_p\Sigma$ површи у свакој тачки $p \in \Sigma$. Оваква фамилија норми која глатко зависи од p назива се *Финслеровом метриком* на површи а сама површ *дводимензионалном Финслеровом многострукошћу.* Када је ова норма индукована скаларним производом, говоримо о *Римановим метрикама* и *Римановим многострукостима.* $\diamond$

Задатак 1. Норма $\|(x, y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$ задаје Финслерову метрику у равни $\mathbb{R}^2$. Доказати да произвољна крива $t \mapsto (x(t), y(t))$ која спаја координатни почетак са тачком $(1, 0)$ и задовољава $\dot{x} > |\dot{y}|$ има дужину 1. Израчунати растојање између тачака $(0, 0)$ и $(1, 0)$ у тој метрици. $\lhd$

[1] Сва пресликавања, функције и криве које разматрамо у овом чланку су глатки, тј. бесконачно пута диференцијабилни, па то убудуће нећемо посебно наглашавати.

[2] Овде, а и убудуће, претпостављамо да су услови под којима одређени лимеси, супремуми и инфимуми постоје расправљени у оквиру првог курса Анализе.

Сада лако можемо да одговоримо на једно од питања постављених у уводу - шта је најкраћи пут за путника који путује по површи.

Дефиниција 2. Крива $\mathbf{r} : [a, b] \to \Sigma$ назива се *минималном геодезијском линијом* ако је $L(\mathbf{r}) = d(\mathbf{r}(a), \mathbf{r}(b))$. Крива $\mathbf{r} : [a, b] \to \Sigma$ назива се *геодезијском линијом* ако је она минимална геодезијска линија на довољно малим подинтервалима интервала $[a, b]$; прецизније, ако за свако $t_0 \in (a, b)$ постоји $\varepsilon > 0$ такво да је за свака два броја $s_1 \leq s_2$ из интервала $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ дужина криве $r(t)$, $s_1 \leq t \leq s_2$ једнака $d(\mathbf{r}(s_1), \mathbf{r}(s_2))$. $\Diamond$

Пример 1. Једине геодезијске линије у равни са еуклидском метриком су сегменти правих [1]. $\triangleright$

Уз претходни пример, следећи задатак показује да појам геодезијске линије зависи од избора Финслерове метрике и уједно одговара и на питање да ли најкраћи пут мора да буде јединствен.

Задатак 2. [3] Доказати да је *свака* крива из Задатка 1 минимална геодезијска. $\triangleleft$

Напоменимо да је метрика у претходном задатку Финслерова. У случају Риманове метрике, геодезијске линије су *локално* јединствене. Прецизније, важи следећа теорема, чији се доказ може наћи у [5].

Теорема 1. *За сваку тачку $p \in \Sigma$ постоје отворена околина $V_p \subset \Sigma$ и позитиван број ε такви да се сваке две тачке $q_1, q_2 \in V_p$ могу спојити јединственом минималном геодезијском чија је дужина мања од ε.* $\square$

Глобална верзија претходне теореме у општем случају не важи: минимална геодезијска линија између две удаљене тачке не мора да буде јединствена. То показује следећи пример.

Пример 2. Једине геодезијске линије на сфери $\mathbf{S}^2$ са еуклидском метриком наслеђеном из $\mathbb{R}^3$ су сегменти великих кружница, тј. пресека сфере са равнима које садрже њен центар. Заиста, нека је $C \subset \mathbf{S}^2$ велика кружница и $q_1, q_2 \in C$ две тачке које се могу спојити *јединственом* минималном геодезијском $\alpha : [a, b] \to \Sigma$, као у Теореми 1. Нека је $\mathcal{S}_C : \mathbf{S}^2 \to \mathbf{S}^2$ рефлексија у односу на раван кружнице C. Наравно, тада је $\mathcal{S}_C(C) = C$. Није тешко видети да је $\mathcal{S}_C$ изометрија и да одатле следи да је и $\mathcal{S}_C \circ \alpha$ геодезијска. Из локалне јединствености минималне геодезијске следи да је $\alpha([a, b]) = \mathcal{S}_C(\alpha([a, b]))$, што значи да је $\alpha([a, b]) \subset C$.

Најкраћи пут између супротних полова није јединствен. Ако из сфере одстранимо једну тачку, лако видимо и да најкраћи пут између две тачке не мора увек да постоји, чак и ако постоји геодезијска између њих. $\triangleright$

3. Геодезијске линије и варијациони рачун

Сада ћемо да дамо нешто другачији приступ дефиницији геодезијских линија. Од сада ћемо посматрати само Риманове метрике, дакле норме индуковане скаларним производом.

Нека је Σ површ у $\mathbb{R}^3$. Посматрајмо простор глатких кривих $\Omega(\Sigma) = \{\gamma : [a, b] \to \Sigma\}$ и функционале $L, E : \Omega(\Sigma) \to \mathbb{R}$,

$$L(\gamma) = \int_a^b \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| dt \qquad \text{и} \qquad E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_a^b \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\|^2 dt.$$

Први се назива *функционалом дужине*, а други *функционалом енергије* или *функционалом дејства.*

Задатак 3. Доказати да се функционал дужине не мења, а функционал енергије мења при репараметризацији криве.[3]

Имајући у виду Дефиницију 2, можемо да покушамо да нађемо геодезијску линију као критичну тачку функционала L. Да бисмо прецизирали тај појам (ради се о функционалу на бесконачно димензионом и тополошки веома сложеном простору), дајемо следећу дефиницију.

Дефиниција 3. Крива γ се назива *екстремалом* функционала L ако за свако глатко пресликавање $u:(-\varepsilon,\varepsilon)\times[a,b]\to\Sigma$ за које је $u(0,t)=\gamma(t)$ и $u(s,a)\equiv\gamma(a)$, $u(s,b)\equiv\gamma(b)$ важи $\frac{\partial}{\partial s}\big|_{s=0}L(u(s,\cdot))=0$. $\Diamond$

Пример 3. Права као екстремала функционала дужине. Извод израза $L(u(s,\cdot))=\int_a^b\|\frac{\partial u(s,t)}{\partial t}\|\,dt=\int_a^b\sqrt{\langle\frac{\partial u(s,t)}{\partial t},\frac{\partial u(s,t)}{\partial t}\rangle}\,dt$ по s је

$$\frac{\partial}{\partial s}L(u(s,\cdot))=\int_a^b\langle\frac{\partial^2 u(s,t)}{\partial s\partial t},\frac{\partial u(s,t)}{\partial t}\rangle\big(\sqrt{\langle\frac{\partial u(s,t)}{\partial t},\frac{\partial u(s,t)}{\partial t}\rangle}\big)^{-1}\,dt.$$

Применом парцијалне интеграције и услова $u(s,a)\equiv\gamma(a)$, $u(s,b)\equiv\gamma(b)$ добијамо $\frac{\partial}{\partial s}L(u(0,\cdot))=-\int_a^b\left\langle X(t),\frac{d}{dt}\frac{d\gamma}{dt}\left(\sqrt{\left\langle\frac{d\gamma}{\partial t},\frac{d\gamma}{dt}\right\rangle}\right)^{-1}\right\rangle dt$, где је $X(t)=\frac{\partial u}{\partial s}(0,t)$. Из последње формуле следи да је γ екстремала функционала L ако и само ако је $(\forall X(t))\langle X(t),\frac{d}{dt}\frac{d\gamma}{dt}(\sqrt{\langle\frac{d\gamma}{\partial t},\frac{d\gamma}{dt}\rangle})^{-1}\rangle=0$, што је еквивалентно са $\frac{d}{dt}\frac{d\gamma}{dt}(\sqrt{\langle\frac{d\gamma}{\partial t},\frac{d\gamma}{dt}\rangle})^{-1}=0$, тј. $\frac{d\gamma}{dt}=const$. Решења су праве. $\triangleright$

Важи следећа теорема, чији доказ не наводимо (в. [5]).

Теорема 2. *Крива γ је екстремала функционала L ако и само ако је нека њена репараметризација екстремала функционала E.* $\square$

Ова теорема нам омогућава да геодезијске тражимо као екстремале функционала E. Вратимо се још једном правој у еуклидском простору.

Пример 4. Права као екстремала функционала енергије. Диференцирањем израза $E(u(s,\cdot))=\int_a^b\|\frac{\partial u(s,t)}{\partial t}\|^2\,dt=\int_a^b\langle\frac{\partial u(s,t)}{\partial t},\frac{\partial u(s,t)}{\partial t}\rangle\,dt$ по s и парцијалном интеграцијом добијамо једноставнији израз од оног у Примеру 3:

$$\frac{\partial}{\partial s}E(u(s,\cdot))=-\int_a^b\left\langle\frac{\partial^2 u(s,t)}{\partial t^2},\frac{\partial u(s,t)}{\partial s}\right\rangle dt. \tag{4}$$

Последњи израз је у $s=0$ једнак нули за сваку варијацију u, па опет добијамо $\ddot\gamma=0$. $\triangleright$

Посматрајмо сада површ Σ снабдевену Римановом метриком. Нека је $\gamma(t)$ глатка крива и $u(s,t)$ њена глатка варијација. Ако покушамо да поновимо рачун из Примера 3 и 4 и диференцирамо, рецимо, функционал

[3]Под репараметризацијом криве γ подразумевамо криву $\gamma\circ\psi$, где је $\psi:[a,b]\to[a,b]$ глатка бијекција са глатким инверзом. Крива и њена репараметризација се, очигледно, разликују само *као пресликавања*, док су њихове слике на површи Σ исте. У том смислу можемо да идентификујемо различите репараметризације једне криве.

E, видимо да израз (4) нема смисла: скаларни производ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ је дефинисан само на тангентним равнима $T_p\Sigma$, а вектор $\frac{\partial^2 u(s,t)}{\partial t^2}$ не мора да припада тангентној равни површи Σ, мада јој $\frac{\partial u(s,t)}{\partial t}$ припада. Општије, нека су $p \mapsto X_p$ и $p \mapsto Y_p$ глатке фамилије тангентних вектора површи Σ,[4] нека је DX извод пресликавања $X : \Sigma \to \mathbb{R}^3$, $p \mapsto X_p$ и нека је $DX(Y_p)$ његова вредност у правцу вектора Y_p. Тада $DX(Y_p)$ припада тангентном простору $T_p\mathbb{R}^3$ еуклидског простора $\mathbb{R}^3$, тј. простору вектора са почетком у тачки p. Изаберимо пројекцију

$$\pi_p : T_p\mathbb{R}^3 \to T_p\Sigma. \tag{5}$$

Приметимо да избор пројекције π_p није јединствен.

Дефиниција 4. Глатка фамилија пројекција (5) назива се *конексијом* на површи Σ. Векторско поље $p \mapsto \pi_p(DX(Y_p))$ називамо *коваријантним изводом* векторског поља X у правцу вектора Y_p и означавамо са $\nabla_{Y_p} X$. $\Diamond$

Није тешко проверити да операција ∇ има следећа својства:

$$\begin{aligned} \nabla_{fX+gY} Z &= f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z, \\ \nabla_X(Y+Z) &= \nabla_X Y + \nabla_X Z, \\ \nabla_X(fY) &= f\nabla_X Y + df(X)Y, \end{aligned} \tag{6}$$

за векторска поља X, Y, Z на Σ и функције $f, g : \Sigma \to \mathbb{R}$. Коваријантно диференцирање уведено Дефиницијом 4 зависи од избора конексије, тј. фамилије пројекција π_p. Иако овај избор није јединствен, постоји природан избор који нам омогућава да рачун из Примера 3 и 4 пренесемо и на површи. Анализом тог рачуна одмах видимо да смо у њему користили *Лајбницово својство* у односу на скаларни производ:

$$Y_p\langle X^1, X^2\rangle = \langle \nabla_{Y_p} X^1, X^2\rangle + \langle X^1, \nabla_{Y_p} X^2\rangle, \tag{7}$$

где израз на левој страни означава извод функције $p \mapsto \langle X_p^1, X_p^2\rangle$ у правцу вектора Y_p. Мање очигледно је да нам је, да бисмо могли да поновимо тај рачун, неопходна и тзв. *симетричност* коваријантног извода:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]. \tag{8}$$

Овде је $[X, Y] = (c_1, c_2, c_3)$ векторско поље са координатама

$$c_k = \big(a_1\frac{\partial b_k}{\partial x} - b_1\frac{\partial a_k}{\partial x}\big) + \big(a_2\frac{\partial b_k}{\partial y} - b_2\frac{\partial a_k}{\partial y}\big) + \big(a_3\frac{\partial b_k}{\partial z} - b_3\frac{\partial a_k}{\partial z}\big)$$

где су (a_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, b_3) координате векторских поља X_1 и X_2 редом. Овај услов има улогу да обезбеди комутативност других парцијалних извода, $\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t\partial s}$, коришћену у Примерима 3 и 4.

Дефиниција 5. Ако конексија π индукује коваријантни извод који задовољава (7) и (8), називамо је *Римановом* или *Леви–Чивита конексијом.*

За овако изабрану конексију можемо да спроведемо рачун аналоган оном који смо у Примеру 4 спровели за праве и закључимо да се геодезијске линије карактеришу једначином $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$. Ова једначина назива се *једначином геодезијских.*

[4] Овакве фамилије називају се *векторским пољима* на Σ. Формално, векторско поље је пресликавање $F : \Sigma \to \bigcup_p T_p\Sigma$ које задовољава $F(p) \in T_p\Sigma$.

Задатак 4. Спровести овај рачун. $\triangleleft$

4. **Покретни координатни систем**

Резултат коваријантног диференцирања уведеног у претходном параграфу је векторско поље чија је вредност у тачки $p \in \Sigma$ вектор у тангентној равни $T_p\Sigma$. Упоредимо коваријантни извод са обичним изводом DY пресликавања $Y : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. У еуклидском простору $\mathbb{R}^3$ поистовећујемо паралелне векторе исте дужине и оријентације, па извод $DY(p)$ у тачки $p \in \mathbb{R}^3$ можемо да посматрамо као линеарно пресликавање $DY(p) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, а његове вредности $DY(p)(X)$ као векторе у $\mathbb{R}^3$. При томе, за различите тачке $p, q \in \mathbb{R}^3$ добијамо суштински исте објекте. Насупрот томе, не постоји *канонски*[5] начин да идентификујемо векторе из простора $T_p\Sigma$ и $T_q\Sigma$ за $p \neq q$ (паралелна транслација у $\mathbb{R}^3$ очигледно не мора да пресликава тангентне векторе у тангентне векторе површи Σ). То значи да резултате коваријантног диференцирања треба посматрати *као векторе у различитим векторским просторима*. Како рачунати са оваквим векторима „у координатама"? Ово питање нас доводи до следећег појма.

Дефиниција 6. Нека је за свако $p \in \Sigma$ задат координатни систем F_p у тангентној равни $T_p\Sigma$. Фамилија $\{F_p\}_{p\in\Sigma}$ назива се *покретним координатним системом* површи Σ. Унија свих покретних координатних система назива се *главним раслојењем* површи. $\diamondsuit$

Ради илустрације, подсетимо се једног покретног координатног система познатог из курса Аналитичке геометрије [2].

Пример 5. Поларне координате. Нека је P тачка еуклидске равни $\mathbb{R}^2$ и $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ њен вектор положаја. Означимо са θ и $r = \|\mathbf{r}\|$ поларне координате. Посматрајмо јединичне векторе

$$\mathbf{u_r} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j}, \quad \mathbf{u}_\theta = -\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j} \tag{9}$$

у простору $T_P\mathbb{R}^2$. Вектор $\mathbf{u_r}$ је тангентни вектор полуправе $\theta = const$, а вектор $\mathbf{u}_\theta$ тангентни вектор кружнице $r = const$. У овим ознакама, вектор положаја тачке P је $\mathbf{r} = r\mathbf{u_r}$.

Посматрајмо криву $t \mapsto \mathbf{r}(t)$. Њен тангентни вектор је $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\mathbf{u_r}) = \frac{dr}{dt}\mathbf{u_r} + r\frac{d\mathbf{u_r}}{dt}$. Диференцирањем једначине (9) добијамо $\frac{d\mathbf{u_r}}{dt} = \frac{d\mathbf{u_r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\mathbf{u}_\theta$, па је $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\mathbf{u_r} + r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{u}_\theta$. Ако последњу једначину диференцирамо још једном по t, после краћег рачуна (сличног претходном) добијамо

$$\mathbf{a} := \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\big(\frac{d\theta}{dt}\big)^2\right)\mathbf{u_r} + \left(r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right)\mathbf{u}_\theta.$$

Ова формула има следећу механичку последицу. Нека је $\mathbf{r}(t)$ трајекторија тачке која се креће под дејством *поља централне силе* $\mathbf{F} = \lambda\,\mathbf{u_r}$ (нпр. планета у пољу гравитације Сунца). Тада из *Другог Њутновог закона* $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ следи $r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = 0$. Ову диференцијалну једначину можемо да решимо

[5] Под *канонски* уведеним појмом се подразумева појам који се може увести само помоћу појмова које имамо на располагању *до његовог увођења*. Нпр. постоји изоморфизам између свака два векторска простора исте димензије, али не постоји *канонски* изоморфизам између њих: да бисмо такав изоморфизам конструисали, морамо да уведемо нов објекат у векторске просторе које разматрамо, нпр. базе.

сменом $y=\frac{d\theta}{dt}$. Она онда постаје $r\frac{dy}{dt}+2y\frac{dr}{dt}=0$, а после „скраћивања са dt" и раздвајања променљивих, $y^{-1}dy=-2r^{-1}dr$. Решење ове једначине је $r^2y=C$, односно, после враћања смене,

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=C. \tag{10}$$

Нека је $A(t)$ површина коју вектор положаја планете одсеца за време t од унутрашњости своје елиптичке орбите. Тада је $\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}$. Одатле и из (10) следи тврђење **Другог Кеплеровог закона:** *Секторијална брзина кретања планета је константна.* $\triangleright$

Вратимо се сада коваријантном изводу. Нека је $\mathbf{e}_p^1,\mathbf{e}_p^2$ база векторског простора $T_p\Sigma$. Произвољно векторско поље Y на Σ може да се напише у тој бази као $Y_p=a_1(p)\,\mathbf{e}_p^1+a_1(p)\,\mathbf{e}_p^1$, за неке глатке функције $a_1,a_2:\Sigma\to\mathbb{R}$. Изаберимо вектор $X_p\in T_p\Sigma$. Применом особина (6) коваријантног диференцирања добијамо $\nabla_{X_p}Y=\sum_{k=1}^2(da_k(p)(X_p)\,\mathbf{e}_p^k+a_k(p)\nabla_{X_p}\mathbf{e}_p^k)$. Коваријантни извод векторских поља $\mathbf{e}^1,\mathbf{e}^2$ у бази $\mathbf{e}_p^1,\mathbf{e}_p^2$ може да се запише као $\nabla_{X_p}\mathbf{e}^k=\omega_1^k(p)(X_p)\,\mathbf{e}_p^1+\omega_2^k(p)(X_p)\,\mathbf{e}_p^2$, па је

$$\nabla_{X_p}Y=\sum_{k=1}^2\left(da_k(p)(X_p)+\sum_{j=1}^2 a_j\omega_k^j(p)(X_p)\right)\mathbf{e}_p^k. \tag{11}$$

Из (6) следи да су $\omega_k^j(p)$, $k,j\in\{1,2\}$ глатке (по p) фамилије линеарних форми $T_p\Sigma\to\mathbb{R}$. Ове форме називамо *формама конексије.*

Задатак 5. Посматрајући еуклидску раван као површ $z=0$ у $\mathbb{R}^3$, изразити форму конексије у покретном координатном систему из Примера 5.

Додатак: Уопштења

Нека је M *глатка многострукост*, тј. подскуп еуклидског простора $\mathbb{R}^m$ који се локално може задати као скуп нула независних глатких функција. Прецизније, свака тачка $p\in M$ има околину V_p такву да је $M\cap V_p=\{x\in\mathbb{R}^m\mid f_1(x)=\cdots=f_k(x)=0\}$ за неке глатке функције $f_1,\dots,f_k:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ чији су градијент–вектори $\nabla f_1(p),\dots,\nabla f_k(p)$ линеарно независни у свакој тачки $p\in M$. Број $n=m-k$ називамо *димензијом* многострукости; ако је M повезана он не зависи од избора тачке p.[6] Ортогонални комплемент линеарног омотача вектора $\nabla f_1(p),\dots,\nabla f_k(p)$ називамо *тангентним простором* многострукости M у тачки p и означавамо са T_pM.

Из Теореме о имплицитној функцији следи да за многострукост M димензије n и $p\in M$ постоји околина $p\in V\subset M$ и глатка параметризација $u:\mathbb{R}^n\to V$. Прецизније, u је глатки хомеоморфизам (у односу на релативну топологију на M наслеђену из $\mathbb{R}^m$). На тај начин добијамо *локалне координате* на M: ако је $p=u(x_1,\dots,x_n)$ кажемо да су $(x_1,\dots,x_n)$ *координате тачке p у локалним координатама* (V,u).

Ако је $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ крива у M, диференцирањем израза $f_j(\gamma(t))=0$ закључујемо да је $\dot\gamma(0)\perp\nabla f_j(\gamma(0))$ за $j=1,2,\dots,k$. Одавде се лако види да T_pM можемо да идентификујемо са простором тангентних вектора у нули на криве у M за које је $\gamma(0)=p$. И тангентне векторе,

[6] Ово тврђење следи из Теореме о имплицитној функцији и Теореме о инваријантности домена; последња се изучава на курсевима Алгебарске топологије.

као и тачке на M, можемо да запишемо у координатама. Ако је $\gamma(t) = u(x_1(t), \dots, x_n(t))$, онда тангентни вектор $\dot\gamma(0) \in T_{\gamma(0)}$ идентификујемо са n–торком $(\dot x_1(0), \dots, \dot x_n(0))$. Одавде се, после краћег рачуна, види да, ако су $(a_1, \dots, a_n)$ и $(b_1, \dots, b_n)$ координате истог вектора у координатама (V_a, u_a) и (V_b, u_b), онда важи

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} a_j, \tag{12}$$

где су $(x_1, \dots, x_n)$ координате на V_a, а $(y_1, \dots, y_n)$ на V_b.

Леви–Чивитин и Кристофелов приступ конексијама. Нека је $X = (a_1(x_1, \dots, x_n), \dots, a_n(x_1, \dots, x_n))$ векторско поље на многострукости M, записано у координатама. Ако његове координате диференцирамо, рецимо по x_k, добијамо n–торку $(\frac{\partial a_1}{\partial x_k}, \dots, \frac{\partial a_n}{\partial x_k})$, која не мора да задовољава услов (12). Дакле, обично парцијално диференцирање векторска поља *не преводи* у векторска поља. Да би кориговао резултат диференцирања векторских поља у координатама, Кристофел је увео уопштење парцијалног диференцирања додавањем још једног члана

$$\nabla_k a_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial a_j}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} \Gamma_{ki}^{j} a_i, \tag{13}$$

где су Γ_{ki}^{j} изабрани тако да је услов (12) испуњен. Геометријски приступ и смисао ове идеје нашао је Леви–Чивита. Величине Γ_{ki}^{j} у (13) називају се *Кристофеловим симболима.*

Козулов приступ конексијама. Козул је аксиоматизовао Кристофелов и Леви–Чивитин приступ конексијама: ако својства (6) усвојимо за дефиницију конексије, Кристофелове симболе можемо да израчунамо у координатама и добијемо локални запис (13). Уз додатне захтеве (7) и (8), добијени оператор је *јединствен.*

Картанов приступ конексијама. Ели Картан је развио теорију конексија на језику *диференцијалних форми*: конексија је задата ако је задата n–торка линеарних форми $\omega_p : T_pM \to \mathbb{R}$ која глатко зависи од p. Дефиниција коваријантног извода онда је директно уопштење формуле (11).

Ересманов приступ конексијама. Ересманове конексије су уопштења Картанових. Ересман је дефинисао конексију као фамилију *хоризонталних потпростора* на главним раслојењима. Дискусија о Ересмановим конексијама превазилази оквире овог чланка. Заинтересованим читаоцима препоручујемо књигу [4], у којој се говори и о улози коваријантног диференцирања у Картановом уопштењу Клајновог Ерлангенског програма.

Литература

1. Еуклид, *Елементи*, IV–III в. пре Христа.
2. G.B. Thomas, R.L. Finney, *Calculus and Analytic Geometry*, 5th ed., Addison-Wesley, 1981.
3. F. Lalonde, D. McDuff, *Hofer's L^∞–geometry: energy and stability of Hamiltonian flows I & II*, Invent. Math. **122** (1995), 1–33, 35–69.
4. R. W. Sharpe, *Differential Geometry*, Springer–Verlag, New York, 1996.
5. M. Spivak, *A comprehesive introduction to differential geometry*, Publish or Perish Inc, 1979.

Математички факултет, Студентски трг 16, Београд,