АНАЛИЗА НА МНОГОСТРУКОСТИМА – КОМЕНТАРИ УЗ ДОМАЋЕ ЗАДАТКЕ

♠ `УЗ 1. ЗАДАТАК:` За које $\lambda \in \mathbf{R}$ је скуп $\{z \in \mathbf{C} \mid |z^{19} - 1| = \lambda\}$ глатка подмногострукост у $\mathbf{C}$? Ово питање може да се сведе на издвајање холоморфне гране функције $\sqrt[19]{\cdot}$.

♠ `УЗ 2. ЗАДАТАК:` Требало би да сви знају контрапример у случају општег тополошког (или метричког) простора (или у случају изостављања претпоставке о отворености), као и која од ове две повезаности је јаче својство. Треба обратити пажњу на то да нулта де Рамова кохомологија (или сингуларна хомологија и кохомологија) броји компоненте *путне* повезаности. Компоненте обичне повезаности броји Чехова кохомологија (видети Напомену 1 на 503. страни).

♠ `УЗ 3. ЗАДАТАК:` Да ли је крива $y^2 = x^2 + x^3$ глатка многострукост?

♠ `УЗ 4. ЗАДАТАК:` Да ли су сва сечења векторског раслојења трансверзална на влакна?

♠ `УЗ 5. ЗАДАТАК:` Да ли је векторско поље $y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$ у $\mathbf{R}^2$ Хамилтоново?

♠ `УЗ 6. ЗАДАТАК:` Да ли нека од ових кривих лежи у једној равни?

♠ `УЗ 7. ЗАДАТАК:` Да ли се криве на сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ у $\mathbf{R}^3$ секу под истим углом као и њене слике при стереографској пројекцији (централној пројекцији из тачке $(0, 0, 1)$ на xy–раван)? Зашто то оправдава дефиницију угла између кривих у тачки ∞ из комплексне анализе: *Угао између кривих које се секу у* ∞ *је угао између њихових слика при пресликавању* $z \mapsto z^{-1}$? (Шта је геометријски опис трансформације равни $z \mapsto z^{-1}$ при стереографској пројекцији равни на сферу?)

♠ `УЗ 8. ЗАДАТАК:` Како би гласио одговор на исто питање за пресликавање

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2, \qquad f(t) = (t^2, t^3),$$

а како за пресликавање

$$f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2, \qquad f(s, t, v) = (st, v)?$$

♠ `УЗ 9. ЗАДАТАК:` Нека је $Y = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$. Чему је једнак Лијев извод $L_X\zeta(X, Y)$, а чему коваријантни извод $\nabla_X\zeta(X, Y)$ у односу на Леви–Чивита конексију индуковану стандардном Римановом метриком у Еуклидском простору?

♠ `УЗ 10. ЗАДАТАК:` Ако је услов $L_X f = L_Y f$ испуњен само у тачки p (за сваку функцију f глатку у некој околини тачке p), да ли одатле следи $X_p = Y_p$?

♠ `УЗ 11. ЗАДАТАК:` Да ли је овај интеграл (негативна) површина? Колика је његова вредност дуж криве $r^2 = \cos 2\theta$ и која је то површина за различите оријентације ове криве?

♠ `УЗ 12. ЗАДАТАК:` Упоредити са паркирањем аутомобила и теоремом која из њега следи (144. страна). Доказати ово тврђење: *Ако је*

$[X,Y]=0$ и ако су f_t, g_t дифеоморфизми генерисани векторским пољима X, Y редом, онда је векторско поље $X+Y$ генерише дифеоморфизам $f_t \circ g_t$. Зашто ово тврђење не важи без претпоставке $[X,Y]=0$ (дати контрапример)?

♠ `УЗ 13.` `ЗАДАТАК:` Ако је $X = (X_1(x_1,\dots,x_n),\dots,X_n(x_1,\dots,x_n))$ векторско поље у $\mathbf{R}^n$,

$$\mathrm{div}X = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_k}{\partial x_k}$$

и $\Omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, онда је

$$(\clubsuit) \qquad d(\imath(X)\Omega) = \mathrm{div}X \cdot \Omega$$

(доказати!). Формула ($\clubsuit$) се може узети као дефиниција дивергенције векторског поља на *оријентисаној* многострукости са формом оријентације Ω. Упоредити ово са Задатком 4 на 354. страни. У чему је разлика између ове две дефиниције дивергенције? Јесу ли оне у некаквој вези (и каквој)? Видети Задатак 3 на 391. страни.

Доказати формулу

$$\int_M \mathrm{div}X \cdot \Omega = \int_{\partial M} \imath(X)\omega.$$

Која формула класичне анализе се добија из ове ако је M област у $\mathbf{R}^3$?

Описати сва холоморфна пресликавања $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ која чувају површине. Како ово може да се уопшти на холоморфна пресликавања $f : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$?

♠ `УЗ 14.` `ЗАДАТАК:` (УПУТСТВО: Израчунати

$$L_X(\mathrm{div}Y \cdot \Omega) \quad \text{и} \quad L_Y(\mathrm{div}X \cdot \Omega)$$

по Лајбницовом правилу за Лијев извод и одузимањем добијених израза изразити десну страну једнакости коју треба доказати. Применом дефиниције ($\clubsuit$), особина Лијевог извода и Картанове формуле доказати да је добијени израз једнак левој страни те једнакости.) Да ли добијена формула важи и за дивергенцију дефинисану у Задатку 4 на 354. страни?

♠ `УЗ 15.` `ЗАДАТАК:` Ако је Ω форма запремине и f глатка функција, доказати да је $df(X)\cdot\Omega + f\mathrm{div}X \cdot \Omega$ тачна форма.

♠ `УЗ 16.` `ЗАДАТАК:` У решењу овог задатка користи се и Теорема 2 на 196. страни (апроксимација непрекидног пресликавања глатким). На ком месту? О језгру можемо да кажемо следеће: $\pi_1(M)$ није, а $\mathbf{R}$ јесте комутативна група, па језгро садржи комутатор $[\pi_1(M), \pi_1(M)]$. Погледати 481. и 482. страну, $H_1(M) = \pi_1(M)/[\pi_1(M), \pi_1(M)]$, Поенкареову дуалност (коју остварује $\int$) за нешто прецизнији опис језгра (који не може да буде потпуно експлицитан за произвољну форму θ).

♠ `УЗ 17.` `ЗАДАТАК:` У вези са овим, погледати и Задатке 14 - 16 на 129. страни.

♠ `УЗ 18.` `ЗАДАТАК:` Шта је $\pi_n(\mathbf{S}^n)$? Погледати 481. и 482. страну и Теорему 13. на 480. страни. Видети такође Задатак 2 на 488. страни.

♠ `УЗ 19.` `ЗАДАТАК:` Погледати 421. и 422. страну.

♠ `УЗ 20.` `ЗАДАТАК:` Оба дела могу да се ураде помоћу степена пресликавања. За други део погледати Хопфову теорему на 535. страни. Алтернативно: интерпретирати степен пресликавања $f:\mathbf{S}^n\to\mathbf{S}^n$ на језику њиме индукованог пресликавања $f_*:\pi_n(\mathbf{S}^n)\to\pi_n(\mathbf{S}^n)$ (овде се користи специфичност ситуације у којој је многострукост на којој посматрамо f сфера, која се јавља у две улоге: као многострукост на којој је дефинисано пресликавање чији степен рачунамо и као алат у дефиницији групе π_n). Да ли овај задатак може да се уради и помоћу Лефшецове теореме?

♠ `УЗ 21.` `ЗАДАТАК:` Зашто је $\wedge$ добро дефинисано множење у де Рамовој кохомологији? Шта је у хомологији дуално овој операцији у кохомологији? Ово је у суштини задатак из Поенкареове дуалности и теорије пресека.

♠ `УЗ 22.` `ЗАДАТАК:` Да ли постоји дифеоморфизам између ова два торуса који чува Риманове метрике индуковане Римановим метрикама из амбијентних Еуклидских простора? Да ли постоји дифеоморфизам између ова два торуса који чува површине и под којим условима (тј. између каквих торуса постоји)? Када постоји холоморфни дифеоморфизам између два торуса $\mathbf{C}/a_1\mathbf{Z}\oplus b_1\mathbf{Z}$ и $\mathbf{C}/a_2\mathbf{Z}\oplus b_2\mathbf{Z}$, у односу на комплексну структуру наслеђену из $\mathbf{C}$? Када постоји дифеоморфизам између два торуса који је холоморфан и чува површине?

♠ `УЗ 23.` `ЗАДАТАК:` Доказати да је форма

$$\omega=\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}x_k dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_k}\wedge\cdots\wedge dx_{n+1}$$

инваријантна у односу на пресликавање $\mathbf{x}\mapsto-\mathbf{x}$ простора $\mathbf{R}^{n+1}$ ако је n непаран број. Извести закључак о оријентабилности реалних пројективних простора непарне димензије. Шта је са оријентабилношћу реалних пројективних простора парне димензије?

♠ `УЗ 24.` `ЗАДАТАК:` Чињеници да запремина јединичне лопте расте до одређене димензије, а потом опада и тежи нули, није лако дати геометријско објашњење. Тим пре што је случај јединичне *коцке* сасвим другачији: њена запремина је једнака 1 у свим димензијама. (Приметимо да је и коцка лопта, али у норми $\|\cdot\|_\infty$; у том смислу је норма $\|\cdot\|_\infty$ правилнија од стандардне Еуклидске норме $\|\cdot\|_2$.) Чему тежи запремина n–димензионог торуса кад $n\to\infty$?

♠ `УЗ 25.` `ЗАДАТАК:` Упоредити ово са теоремом на 144. страни. Шта је Хамилтоново векторско поље генерисано функцијом (Хамилтонијаном) $p\mapsto\omega_p(X_G(p),X_H(p))$? Погледати Лему 7 на 225. страни и њен доказ.

♠ `УЗ 26.` `ЗАДАТАК:` Овај задатак је у вези са ,,непарно - димензионом верзијом симплектичке геометрије", контактном геометријом; видети стр. 230 - 232.

♠ `УЗ 27.` `ЗАДАТАК:` Ако, уместо оријентабилности N, претпоставимо оријентабилност M, да ли из тога следи и оријентабилност N?

♠ `УЗ 28.` `ЗАДАТАК:` Описати експлицитну конструкцију (бар једне) форме оријентације на TM.

♠ `УЗ 29.` `ЗАДАТАК:` Нека је

$$0\to E_1\to E_2\to E_3\to 0$$

тачан низ векторских раслојења. Доказати да је, ако су било која два од раслојења E_1, E_2, E_3 оријентабилна, оријентабилно и треће. Доказати да је хиперповрш у оријентабилној многострукости оријентабилна ако и само ако има тривијално нормално раслојење (упоредити са 30. задатком). Показати да то не важи за хиперповрш у неоријентабилној многострукости.

♠ `УЗ 30. ЗАДАТАК:` Да ли је многострукост $F(x_1, \cdots, x_n) = 0$, где је $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ глатко пресликавање, а 0 његова регуларна вредност, увек оријентабилна?

♠ `УЗ 31. ЗАДАТАК:` Израчунати запремину пројективног простора $\mathbf{R}P^n$ користећи овај задатак. Користећи Фубинијеву теорему и 24. задатак израчунати запремину пројективног простора $\mathbf{C}P^n$ (видети Задатак 2 на 488. страни).

♠ `УЗ ЗАДАТКЕ 27 - 31:` Да ли је крај ∂M многострукости увек оријентабилан? Одговор на ово питање даје Задатак 29 на 541. страни. Зашто је ово питање умесно може да се види из Задатка 28 на 540. страни и дискусије иза њега.

Доказати да је просто повезана многострукост оријентабилна (видети Тврђење 2 на 170. страни).

♠ `УЗ 32. ЗАДАТАК:` Погледати Теорему 13 на 480. страни.

♠ `УЗ 33. ЗАДАТАК:` Погледати Задатак 2 на 105. страни и задатке на 114. и 115. страни.

♠ `УЗ 34. ЗАДАТАК:` Конструисати *три* линеарно независна тангентна векторска поља на $\mathbf{S}^3$, тј. да је сфера $\mathbf{S}^3$ паралелизабилна (има тривијално тангентно раслојење). Општије: доказати да на сфери $\mathbf{S}^{4n+3}$ постоје три линеарно независна тангентна векторска поља. Доказати да на $\mathbf{S}^7$ постоји седам линеарно независних тангентних векторских поља, па је и сфера $\mathbf{S}^7$ паралелизабилна.

Да ли на реалним пројективним просторима (који су наткривени сферама) постоји векторско поље које није нигде нула? Приметимо да, ако је $\pi : \widetilde{M} \to M$ наткривање и X векторско поље на $\widetilde{M}$, са $\pi_* X$ *није* добро дефинисано векторско поље на M (зашто?). Упоредити то са 31. задатком; ако је ω форма на M, онда са $\pi^*\omega$ *јесте* добро дефинисана форма на $\widetilde{M}$ (зашто?).

♠ `УЗ 35. ЗАДАТАК:` Упоредити са 20. задатком у коме степен карактерише хомотопску класу.

♠ `УЗ 36. ЗАДАТАК:` Да ли постоји пресликавање $f : \mathbf{S}^n \to \mathbf{S}^n$ степена $(-1)^{n+1}$ које има фиксну тачку? Да ли постоји пресликавање $f : \mathbf{S}^n \to \mathbf{S}^n$ степена $(-1)^{n+1}$ које нема фиксну тачку?

♠ `УЗ 37. ЗАДАТАК:` Да ли овај закључак важи за свако пресликавање степена 0 (које може да буде и НА)? Дати пример пресликавања степена 0 које је НА.

♠ `УЗ 38. ЗАДАТАК:` Да ли се (и) одавде може закључити да на сфери парне димензије не постоји векторско поље које није нигде нула?

♠ `УЗ 39. ЗАДАТАК:` Да ли ово важи за свако $h : \mathbf{C}P^n \to \mathbf{C}P^n$?

♠ `УЗ 40. ЗАДАТАК:` Показати да ово тврђење не важи за сфере непарне димензије: за свако p група $\mathbf{Z}_p$ слободно и глатко дејствује на $\mathbf{S}^{2n+1}$.

♠ `УЗ 41.` `ЗАДАТАК:` Ако је $E \to M$ произвољно векторско раслојење, онда постоји векторско раслојење $F \to M$ такво да је $E \oplus F$ тривијално (доказ овог тврђења, мада не експлицитно формулисаног, може да се пронађе у поглављу *Класификација векторских раслојења*, стр. 491). Не може се, међутим, произвољном раслојењу додати *тривијално* раслојење и добити тривијално (као што је у овом задатку R додато на $T\mathbf{S}^n$). Ово је почетак тзв. K–теорије, уопштене кохомолошке теорије у којој су елементи кохомолошких група класе векторских раслојења, а сабирање операција $\oplus$.

♠ `УЗ 42.` `ЗАДАТАК:` Нулто сечење је специјални случај конормалног раслојења ν^*N, за $N = M$ (видети 50. задатак или 295. страну). Други специјални случај, за $N = \{p\}$, је влакно T_p^*M. Када је df трансверзално на T_p^*M? Шта може да се каже о рангу другог извода $D^2f(p)$, за $p \in N$, ако је df трансверзално на ν^*N? Да ли из овог општег случаја следе два специјална ($N = M$ и f Морсова, и $N = \{p\}$ и f произвољна)?

♠ `УЗ 43.` `ЗАДАТАК:` Зашто таква Морсова функција постоји? Да ли постоји Морсова функција на $\mathbf{S}^{2n-1}$ која је инваријантна у односу на $\mathbf{S}^1$–дејство дефинисано множењем са $e^{\imath\theta}$ у $\mathbf{C}^n \supset \mathbf{S}^{2n-1}$?

♠ `УЗ 44.` `ЗАДАТАК:` Погледати доказ Теореме 3 на 455. страни.

♠ `УЗ 45.` `ЗАДАТАК:` Доказати друго тврђење применом првог, а затим применом Поенкареове дуалности. Да ли и сама Поенкареова дуалност може да се докаже из првог тврђења?

♠ `УЗ 46.` `ЗАДАТАК:` Погледати 3. задатак на 433. страни.

♠ `УЗ 47.` `ЗАДАТАК:` Нека је f произвољна Морсова функција која има то својство. Какви су Морсови индекси њених критичних тачака?

♠ `УЗ 48.` `ЗАДАТАК:` Упоредити са Задатком 4 на 412. и Задатком 5 на 431. страни.

♠ `УЗ 49.` `ЗАДАТАК:` Доказати да су екстремале функционала Φ глатке криве.

♠ `УЗ 50.` `ЗАДАТАК:` Нека је $H = \pi^*f$, где је $\pi : T^*M \to M$ канонска пројекција и $f : M \to \mathbf{R}$ глатка функција. Каква је веза између екстремала функционала $\mathcal{A}_H$ и критичних тачака рестрикције функције f на N?