Теорија Морса 2007/08. **Шести домаћи задатак**

(1) Нека је M компактна многострукост и $f : M \to \mathbb{R}$ глатка функција.

(а) Ако је $\mathcal{F}$ фамилија подскупова у M, таква да за сваку једнопараметарску фамилију дифеоморфизама $\psi_t : M \to M$ важи импликација

$$F \in \mathcal{F} \ \Rightarrow \ \psi_1(F) \in \mathcal{F},$$

доказати да је број

$$\operatorname{minimax}(f, \mathcal{F}) := \inf_{F \in \mathcal{F}} \sup_{x \in F} f(x)$$

критична вредност функције f.

(б) Доказати да је $\inf\limits_{[F] \in H_k(M;\mathbb{Z})} \sup\limits_{x \in F} f(x) \in \operatorname{Crit}(f)$. Илустровати ову чињеницу на примеру функције висине на торусу.

(2) Нека је $f : M \to \mathbb{R}$ глатка функција, таква да скуп $\operatorname{Crit}(f)$ њених критичних тачака садржи подмногострукост $S \subset M$ позитивне кодимензије. Нека је на M дата Риманова метрика g и нека је

$$\nu_p^g S := \{X_p \in T_pM \mid (\forall\, Y_p \in T_pS)\, g(X_p, Y_p) = 0\}.$$

Доказати да Хесијан $H_p(f)(V, W) := V_p(\widetilde{W} f)$ (где су $V_p, W_p \in T_pM$, а $\widetilde{W}$ произвољно векторско поље које у тачки p има вредност W_p) индукује симетричну билинеарну форму $H_p^\nu(f)$ на $\nu_p^g S$.

Дефиниција: Глатка функција $f : M \to \mathbb{R}$ се назива *Морс–Ботовом функцијом* ако је скуп $\operatorname{Crit}(f)$ дисјунктна унија повезаних многострукости и ако је на свакој повезаној компоненти $S \subset \operatorname{Crit}(f)$ билинеарна форма $H_p^\nu(f)$ из Задатка 2 недегенерисана за све $p \in S$.

(3) (а) Доказати да је Морсова функција Морс–Ботова.

(б) Да ли је константна функција Морс–Ботова?

(в) Доказати да је квадрат функције висине на сфери Морс–Ботова функција.

(г) Доказати да је функција висине на лежећем торусу Морс–Ботова.

(д) Доказати да је траг матрице Морс–Ботова функција на $SO(n)$.

(ђ) Да ли је траг матрице Морс–Ботова функција на $U(n)$?

(4) Користећи доказ Морсове леме Мозеровим методом деформације, доказати **Морс–Ботову лему:** *Нека је $f : M \to \mathbb{R}$ Морс–Ботова функција и S повезана компонента скупа $\operatorname{Crit}(f)$. За свако $p \in S$ постоје локална карта $U \subset M$ ($p \in U$) и локална декомпозиција $\nu_p S = \nu_p^- S \oplus \nu_p^+ S$ која сваку тачку $x \in U$ идентификује са јединственом тројком $(s, \zeta^-, \zeta^+) \in S \times \nu_p^- S \times \nu_p^+ S$, тако да f има локални запис $f(x) = f(p) - \|\zeta^-\|^2 + \|\zeta^+\|^2$.*

(5) Нека је $f : M \to \mathbb{R}$ Морс–Ботова функција. Доказати да је индекс форме $H_p^\nu(f)$ локално константан и оправдати следећу дефиницију.

Дефиниција: Нека су f, p и S као у Задатку 5. Индекс форме $H_p^\nu(f)$ назива се *Морс–Ботовим индексом* функције f повезане компоненте $S \subset \operatorname{Crit}(f)$.

(6) Израчунати Морс–Ботове индексе функција из Задатка 3.

(7) Да ли градијентне линије Морс–Ботове функције полазе и завршавају се у критичним тачкама (као што је случај са градијентним линијама Морсове функције)?