Одабрана поглавља механике 2009. **Пети домаћи задатак**

(1) Скрипта *Мини курс о симплектичким многострукостима*,

http : //poincare.matf.bg.ac.rs/ ∼ milinko/skripta/simplekticke.pdf

задаци 50–60 и 85–88.

(2) Нека је $Y : M \to TM$ векторско поље на многострукости M и ψ_t њиме генерисана једнопараметарска фамилија дифеоморфизама. *Лијеви изводи* векторског поља X и форме η на M су дефинисани са

$$L_Y X := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \psi_t^* X, \qquad L_Y \eta := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \psi_t^* \eta$$

где је $\psi^* X := \psi_*^{-1} X$ за дифеоморфизам ψ.

(а) Доказати да је Лијев извод 0–форме извод функције у правцу вектора.

(б) Доказати линеарност

$$L_Y(\alpha + \beta) = L_Y \alpha + L_Y \beta$$

и Лајбницово правило

$$L_Y(\alpha \wedge \beta) = (L_Y \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge L_Y \beta$$

за Лијев извод (α и β су диференцијалне форме).

(в) Доказати да Лијев извод

$$L_Y : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$$

комутира са спољашњим изводом

$$d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$$

и унутрашњим изводом

$$\iota_Y : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M).$$

(г) Ако је

$$[X, Y] := XY - YX$$

комутатор векторских поља X и Y, доказати да је

$$L_Y X = [X, Y].$$

(3) Нека је (P, ω) симплектичка многострукост.

(а) Нека су $H, K : P \to \mathbb{R}$ глатке функције, X_H, X_K њима придружена Хамилтонова векторска поља,

$$\{H, K\} := \omega(X_H, X_K)$$

Пуасонова заграда функција H и K, и $X_{\{H,K\}}$ њој придружено Хамилтоново векторско поље. Доказати да је

$$[X_H, X_K] = X_{\{H,K\}}.$$

(б) Нека су

$$X, Y : P \to TP$$

симплектичка (не обавезно Хамилтонова) векторска поља. Доказати да је $[X, Y]$ Хамилтоново векторско поље са Хамилтонијаном

$$H = \omega(X, Y).$$