Seminarski rad:

KOMPRESIJA SLIKE TALASIĆIMA

Reprezentacija funkcije $f(t)$ funkcijom skaliranja i talasićima ima oblik

$$f(t) = \sum_k a_{J,k}\varphi_{J,k}(t) + \sum_{j=1}^{J}\sum_k b_{j,k}\psi_{j,k}(t). \tag{1}$$

Određivanje koeficijenata razvoja $a_{J,k}$ i $b_{j,k}$, $j = 1,\ldots,J$, polazeći od signala $\{a_{0,k}\}_k$ (uzorak funkcije $f(t)$) naziva se transformacijom talasićima (dekompozicija), a rekonstrukcija funkcije $f(t)$ na osnovu ovih koeficijenata naziva se inverzna transformacija talasićima.

Brza transformacija talasićima (FWT) za dekompoziciju datog signala $\mathbf{a}_0$ definisana je izrazom

$$\begin{pmatrix}\mathbf{a}_j\\ \mathbf{b}_j\end{pmatrix} = (\downarrow 2)\begin{pmatrix}C^\top\\ D^\top\end{pmatrix}\mathbf{a}_{j-1} = (\downarrow 2)\,(\,C \quad D\,)^\top\,\mathbf{a}_{j-1}, \quad j = 1,\ldots,J, \tag{2}$$

gde je matrica transforamcije

(3)

$$W = (\downarrow 2)\,(\,C \quad D\,)^\top = \begin{pmatrix} c(0) & c(1) & c(2) & \cdot & c(N-1) & 0 & 0 & \cdot\\ 0 & 0 & c(0) & \cdot & c(N-3) & c(N-2) & c(N-1) & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & \cdot & c(N-5) & c(N-4) & c(N-3) & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ d(0) & d(1) & d(2) & \cdot & d(N-1) & 0 & 0 & \cdot\\ 0 & 0 & c(0) & \cdot & d(N-3) & d(N-2) & d(N-1) & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & \cdot & d(N-5) & d(N-4) & d(N-3) & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

ortogonalna ako je za zadati niskofrekvencijski filtar $\{c(k)\}_{k=0}^{N-1}$ dužine $(N-1)$ (N paran broj) visokofrekvencijski filtar $\{d(k)\}_{k=0}^{N-1}$ određen vezom

$$d(k) = (-1)^k c(N-1-k),\ k = 0,\ldots,N-1.$$

Inverznom transformacijom talasićima rekonstruiše se signal. Zbog ortogonalnosti realne matrice W (3), njena inverzna matrica je jednaka transponovanoj,

$$W^{-1} = W^\top = [(\downarrow 2)\,(\,C \quad D\,)^\top]^\top = (\,C \quad D\,)\ (\uparrow 2),$$

te je inverzna brza transformacija talasićima (IFWT) određena algoritmom

$$\mathbf{a}_{j-1} = (\,C \quad D\,)\ (\uparrow 2)\begin{pmatrix}\mathbf{a}_j\\ \mathbf{b}_j\end{pmatrix}, \quad j = J,\ldots,1. \tag{4}$$

Sliku posmatramo kao dvodimenzioni signal, tj. matricu M. Ako dvodimenzione bazisne funkcije definišemo kao proizvod jednodimezionih bazisnih funkcija

$$\begin{aligned}
\varphi_{j,k}(x,y) &= \varphi_{j,k}(x)\,\varphi_{j,k}(y), && \text{funkcija skaliranja}\\
\psi^h_{j,k}(x,y) &= \varphi_{j,k}(x)\,\psi_{j,k}(y), && \text{horizontalni talasić}\\
\psi^v_{j,k}(x,y) &= \psi_{j,k}(x)\,\varphi_{j,k}(y), && \text{vertikalni talasić}\\
\psi^d_{j,k}(x,y) &= \psi_{j,k}(x)\,\psi_{j,k}(y), && \text{dijagonalni talasić,}
\end{aligned}$$

transformacija talasićima se realizuje tako što se prvo izvrši jednodimenziona transformacija vektora vrsta polazne matrice, a zatim vektora kolona (ili obrnuto),

$$FWT(M) = W\,(W\,M^\top)^\top = W\,M\,W^\top, \tag{5}$$

gde je matrica W data izrazom (3). Jasno je da je inverzni algoritam, kojim se rekonstruiše matrica M definisan inverznom relacijom relaciji (5),

$$M = W^\top\,[FWT(M)]\,W.$$

Kompresija se sastoji u zameni nulom svih koeficijenata talasića u reprezentaciji (1) koji zadovoljavaju uslov $|b_{j,k}| \le \varepsilon$, gde je ε zadati trag.

Zadatak:

Ulaz:

1. Koeficijenti niskofrekvencijskog filtra $c(k)$, $k = 0, \dots, N-1$. Testirati algoritam Haar-ovim filtrom $N = 2$, $c(0) = c(1) = 1/\sqrt{2}$, zbog problema na granici.
2. Datoteka sa slikom.
3. Trag kompresije ε.
4. Broj nivoa analize J.

Izlaz:

1. Izračunati FWT zadate slike i prikazati na ekranu matricu koeficijenata.
2. IFWT algoritmom rekonstruisati sliku na osnovu matrice koeficijenata, i prikazati rekonstruisanu sliku.
3. Prema zadatom tragu ε kompresovati izračunatu FWT transformaciju i prikazati na ekranu novu matricu koeficijenata.
4. Rekonstruisati sliku na osnovu kompresovanih koeficijenata.